物理学最前線

29

大槻義彦 編

量子異常

静谷謙一

相転移の超有効場理論とコヒーレント異常法

鈴木増雄

表面を見る
—走査トンネル顕微鏡の最近の話題

桜井利夫・橋詰富博・酒井 明

共立出版株式会社

刊行にあたって

20 世紀の物理学の進歩はめざましい．1 年間になされる研究の発展は，19 世紀物理学の発展の 10 年分にも 20 年分にも匹敵するとさえいわれる．そしてまた，物理学の進歩は間髪を入れず産業に応用され，技術を革新し，市民の生活に大きな影響を与え，それがさらに物理学そのものを発展させる原動力にもなっている．

かくして，たった 1 年間の物理学の発展にすら，物理学自身追いついてゆけないという悲喜劇が生まれる．物理学会誌にのる多くの解説は，自分の専門とする分野以外さっぱり理解できないというのが現状であろう．もはや物理学者にすら理解できなくなった物理学など，文化として，人類の共通の遺産として，はたして存在価値のあるものであろうか．

もちろん，情報過多の今日，この進歩しすぎる難解な物理学を，やさしく解説しようという試みは山とある．とくに“*Physics Today*”（『パリティ』）や“*Sicentific American*”（『サイエンス』）などはきわめてユニークで意欲的で，それなりに成功しているといえるであろう．しかし，これらはあくまでも雑誌であり，たかだか数ページの内容であるから，最先端の物理学を紹介するには不十分である．一方，最先端の専門書など難解をきわめ，しかもたいていぶ厚く英文である．

そこで,“物理学の最前線”をとりあげ,十分な分量でやさしく解説する刊行物が望まれる.つまるところ,シリーズ『物理学最前線』は科学雑誌がもつやさしいトピックス解説の手法と,単行本がもつゆとりと専門性をミックスさせ,わが国科学文化に寄与しようというものである.これによって,「専門家にしかわからない」という物理学の体質を改善し,大学・高校などの教員,および専門研究者・エンジニアに最先端の物理学を広め,専門家の交流をうながし,物理学をふたたび「豊かな文化」の一員に復帰させようというものである.

大 槻 義 彦

目　次

量子異常＝静谷謙一

1 章　序 ……3
2 章　ゲージ理論 ……6
2･1　保存量と対称性 ……6
2･2　ゲージ理論 ……9
3 章　ゲージ理論における量子異常 ……14
3･1　電流保存と正則化 ……14
3･2　カイラル量子異常 ……17
3･3　アドラー-バーディーン定理 ……21
4 章　カイラル異常項とゲージ場の幾何学 ……23
4･1　藤川の方法 ……23
4･2　ゲージ場の幾何学と指数定理 ……25
4･3　カイラル異常項の半古典的描像 ……27
5 章　カレント代数の量子異常 ……30
5･1　後藤-今村-シュウィンガー項 ……31
5･2　ゲージ異常項との関係 ……32
5･3　２次元のカレント代数 ……33
6 章　非可換カイラル量子異常 ……34
6･1　ヴェス-ズミノ整合条件 ……34
6･2　異常項とその打ち消し条件 ……37
6･3　カイラル異常項の実験による検証 ……39
6･4　量子異常をもつゲージ理論 ……42
7 章　電荷密度波 ……44
7･1　１次元電子・格子系 ……44
7･2　電荷密度波による電気伝導 ……46
おわりに ……48

参考文献 ……………………………………52

相転移の超有効場理論とコヒーレント異常法
＝鈴木増雄

1 章　はじめに ……………………………………57
1･1　相転移とは何か ……………………………………57
1･2　相転移のメカニズム ……………………………………57
1･3　秩序発生のからくり ……………………………………58
1･4　応答発散型の相転移と異常性を
　　特徴づける臨界指数 ……………………………………60
1･5　臨界現象の普遍性 ……………………………………61
1･6　スケーリング則 ……………………………………62
2 章　平均場近似とその一般化 ……………………………………64
2･1　ワイスの平均場近似 ……………………………………64
2･2　ゆらぎをとり入れたクラスター平均場近似 ……66
2･3　久保のカノニカル相関による一般化された
　　クラスター平均場近似 ……………………………………68
3 章　コヒーレント異常法 ……………………………………73
3･1　コヒーレント異常法の基本的なアイデア ………73
3･2　コヒーレント異常法の基本的なスキームと
　　その包絡線の理論による説明 ……………………………75
3･3　近似の度合いスケーリングとコヒーレント
　　異常法のミクロな導出法 ……………………………………76
3･4　CAMカノニカル・シリーズ……………………………77
3･5　双クラスター近似とCAMカノニカリティ………78
3･6　単一クラスター近似の改良とその

カノニカルな性質 ……………………………79
3・7 いろいろな物理量に対するCAM理論……………79
4 章 コヒーレント異常法の応用 ……………………80
4・1 2次元および3次元イジング模型における
ワイス型平均場近似列とCAM理論……………81
4・2 転送行列CAM理論と2次元イジング模型
への応用 ……………………………………………83
4・3 多重有効場CAM理論による2次元イジング
模型の臨界指数の研究 …………………………84
4・4 クラスター変分法とCAM理論……………………87
4・5 量子スピン系のCAM理論……………………………88
4・6 2次元格子ガス(遠い相互作用)の系のモンテ
カルロCAM…………………………………………89
4・7 絶対零度 $T=0$ における相転移のCAM理論……90
4・8 動的臨界現象のCAM理論……………………………91
4・9 アンダーソン局在のCAM理論に向けて…………94
4・10 パーコレーションのCAM理論……………………95
4・11 ラプラシアン・フラクタル(一般化された
DLA模型のパターン)のCAM理論 ……………97
4・12 カオス臨界現象のCAM理論………………………98
5 章 エキゾティックな相転移の超有効場理論 ……99
5・1 超有効場理論の一般論 ……………………………99
5・2 カイラルオーダーの超有効場理論………………102
5・3 スピングラスの超有効場CAM理論 ……………105
5・4 高温超伝導の超有効場CAM理論に向けて ……108
6 章 コヒーレント異常法の拡張 ……………………112
6・1 厳密に解ける模型とCAM理論 ……………………112

6・2　級数CAM理論と連分数CAM……………………113
7 章　まとめ……………………………………………115
参考文献…………………………………………………117

表面を見る＝桜井利夫・橋詰富博・酒井　明
——走査トンネル顕微鏡の最近の話題

1 章　はじめに　……………………………………125
2 章　STMの基礎　…………………………………129
3 章　STMの理論　…………………………………133
3・1　WKB近似　…………………………………………133
3・2　テルソフ-ハマン理論　……………………………135
3・3　ラングの理論……………………………………139
3・4　探針のクラスター近似…………………………143
3・5　トンネル電子分光法(STS)………………………144
4 章　電界イオン顕微鏡の原理　……………………147
5 章　STMの装置　…………………………………153
5・1　STMの歴史　……………………………………153
5・2　STMの開発　……………………………………157
5・3　装置としてのSTM　……………………………160
6 章　FI-STM……………………………………………163
7 章　STMの応用例　………………………………173
7・1　金属表面…………………………………………173
7・2　半導体表面………………………………………176
7・3　Si 表面のアルカリ金属吸着　……………………186
8 章　STMの基礎特性に関する問題点　……………192
8・1　探針-試料間の距離　……………………………193

8・2　電子に対するトンネル障壁の高さ……………………195
8・3　トンネル電流の空間的な広がり：STMの
　　　水平分解能……………………………………………198
8・4　STMの検出限界 ……………………………………201
8・5　STMの接合容量 ……………………………………202
8・6　真空ギャップでの電界強度……………………………203
8・7　探針の清浄度……………………………………………204
8・8　電子のトンネリング時間………………………………205
8・9　異常STM像 …………………………………………206
　　　参考文献…………………………………………………210

量子異常

静谷謙一

1章　序

不変性または対称性 (symmetry) は物理学において重要な働きをする．一般に，物理量の連続的な変換に対して物理法則が形を変えないときには，保存量が現れる．逆に，物理現象を観測して保存する量を知れば，その背景にある対称性をうかがい知ることができ，未知の基礎法則を発見する手掛かりとなる．とりわけ60年代から70年代にわたる素粒子物理学のめざましい発展は，素粒子の内在的性質 (電荷，色，香りなど) に関する保存則，または対称性の発見の歴史でもある．その成果が，素粒子の電磁相互作用と弱い相互作用を統一して記述する標準模型 (standard　model)[1]と，強い相互作用を記述する量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD)[2]である．アインシュタインの重力理論も含めこれらの理論は，ゲージ原理に基づく高い対称性をもつ場の量子論 (ゲージ理論) であるという点で共通している．粒子の内在的性質に関する対称性をゲージ対称性という．ゲージ原理とは，保存量には粒子 (ゲージ粒子) が結びつくとする考え方であり，電磁気学を手本にした一連の(対称性の局所化の)手続きにより基礎理論が構成される[3]．今日，ゲージ原理は素粒子論の指導原理の1つとなった．

場の理論には紫外発散の困難がつきものである．通常の手順(くりこみ)により発散を処理できる性質のよい理論をくりこみ可能という．ゲージ理論が歓迎された大きな理由の1つは，その出現によって初めて多重項を組むベクトル粒子のくりこみ可能な理論が得られたことである[4]．対称性の高い理論ほどその構造に対する制約が強くなり，短波長の振舞いがよくなるのである．

古典論の対称性が量子論でもそのまま実現するとは限らない．量子論に特有

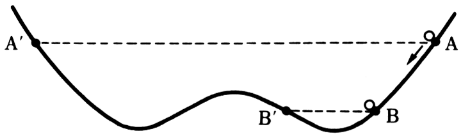


図 1.1　対称性の自発的な破れを感覚的に理解するには，左右対称なポテンシャルの中で運動する質点を考えてみるとよい．点 B から出発した質点の運動 (B ↔ B′) はポテンシャルの左右対称性を反映しない (対称性の自発的な破れ)．一方，十分ポテンシャルの高い点 A から出発する質点の運動 (A ↔ A′) では左右対称性が回復する．軸対称なポテンシャルの際に，その底に沿う軸対称な運動が NG モードに対応する

な対称性の実現様式として，対称性の自発的破れ (spontaneous symmetry breaking) がある[5]．方程式は正しい対称性をもつにもかかわらず，量子論の基底状態 (真空) がその対称性を忠実に実現しない場合，対称性が自発的に破れたという．対称な基底状態がエネルギー的に不安定であって非対称な状態へ相転移を起こすと，この状況となる (図1.1)．

対称性が自発的に破れると，南部-ゴールドストーン (NG) ボソンと呼ばれる質量ゼロの粒子が出現する．ゲージ場が存在すると，NG 粒子のいくつかはゲージ粒子に吸収されて，ゲージ粒子の質量を生み出す．この現象はヒッグス (Higgs) 機構といわれ，弱い相互作用を媒介する W, Z と呼ばれる重いベクトル粒子の質量を生み出す機構として重要である．

対称性が自発的に破れたといっても，対称性が完全に消失するわけではない．その破れを特徴づけるスケールに比べ十分短距離 (高エネルギー) で起こる現象については対称性が回復する．このために弱い相互作用がくりこみ可能になる．くりこみ可能性を損なわずに，生来質量をもたないゲージ場に質量を与えるには，ヒッグス機構によるほかにない．

他方，量子効果により古典論の対称性 (保存則) が修正を受けることもある．この現象が，この解説のテーマである量子異常 (anomaly) である．正準理論の枠内で導かれる低エネルギー定理や高エネルギー和則のなかに摂動論の計算と微妙にくい違う例があることから，量子異常の存在が見いだされた．

カイラル対称性は質量ゼロのフェルミ粒子に由来する対称性である．量子色

力学が出現するかなり以前から，π 中間子の関与するハドロンの力学でカイラル対称性がよい近似で成り立つことが経験的に知られていた．60年代のカレント代数の研究からカイラル対称性が自発的に破れていることと，π 中間子が南部-ゴールドストーン粒子と解釈できることが明らかになった．このハドロン力学のカイラル対称性に量子電磁力学を組み合わせると，中性 π 中間子の放射崩壊に関する低エネルギー定理が導かれる．素朴に計算すると，崩壊率が小さくなり現実と合わない．量子電磁力学の摂動論に基づく詳しい解析により，この低エネルギー定理が電磁相互作用のもとで本質的な修正を受けることが明らかになった．この修正項をカイラル異常項 (chiral anomaly)，または発見者の名を冠してアドラー-ベル-ジャッキーフ異常項 (Adler-Bell-Jackiw anomaly) と呼ぶ[6,7]．異常項を通して中性 π 中間子の放射崩壊が進行することがわかり，その強さからクォークが3種の色荷をもつことも判明する．

量子異常の現れ方には，(1) 保存則の修正と，(2) カレント代数の修正という2種類のパターンが知られている．保存則の修正項を異常項と呼び，代数の修正項を後藤-今村-シュウィンガー (Schwinger) 項[8]と呼んで区別するが，両者には密接な関係がある．

内部対称性に限らず，時空対称性も量子効果により修正を受ける．特に，コンフォーマル対称性とその量子異常は，高エネルギー粒子反応や重力理論，さらに物性の臨界現象の研究において重要である．

対称性というと，力学系を背後から支配する神聖なものというイメージが古典論では定着している．古典論では対称性は力学系の性質のひとつであり，力学自身がそれを変更することはない．量子論ではこの対称性までもが系の力学に依存する“力学的”なものになる．量子異常は古典論と量子論を本質的に隔てるものであり，量子論に特有な現象を解明する鍵となる場合も少なくない．特にゲージ理論については，量子異常の正しい理解なしにその応用を考えることはできない．本稿では，ゲージ理論を中心に量子論における対称性の意味と役割を探る．

2章 ゲージ理論

2･1 保存量と対称性

古典電磁気学では電子は電荷 $-e$ を運ぶ質点と見なされる．電子が自然に消滅することはないので電子の総数も電子の運ぶ電荷も不変である．

分子や原子の世界，さらに小さいスケールの世界では，電子は波動的な性質を顕著に示すようになる．場の量子論では，電子を相対論的な方程式（ディラック方程式）に従う量子的な場 $\psi(x)$ として記述する．量子場 $\psi(x)$ は量子力学の波動関数を拡張したものである．1つの場で電子とその反粒子である陽電子を記述し，さらにそれらのスピン成分 $s_z=\pm 1/2$ をも表すので，ψ は $2\times 2=4$ 成分の場となる．真空中の自由な電子を記述するディラック方程式 $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)=0$ は，ラグランジアン（密度）*

$$L=\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \tag{2.1}$$

から導かれる．m は電子の質量である．電子は量子的な波動ではあるが，観測をすると必ず空間内の1点に局在するので，量子論でも電荷は保存する．実際，ディラック方程式を用いると相対論的な電流 $j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=(\rho,\boldsymbol{j})$ の保存 $\partial_\mu j^\mu=\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}\boldsymbol{j}=0$ が示される．保存する電荷は，電荷密度 $(-e\rho)$ を全空間にわたって積分したものであり，$(-e)\times$（電子数－陽電子数）を意味する．光との相互作用を考えると電子・陽電子の対発生や対消滅が起こるが，その際でも全電荷は不変に保たれる．

---

* 4次元時空の座標を $x^\mu=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(t,x,y,z)$，微分を $\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$ と略記する．くり返し現れる添え字については和をとることとする．$\gamma^\mu(\mu=0,\cdots,3)$ はディラック行列を表す．ψ の成分を表す添え字は省略する．複素共役 $\psi^\dagger$ から $\bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma^0$ が定義される．この解説ではディラック方程式の詳細については知らなくても差し支えない．

電荷の保存は直接にはディラック方程式から導かれるが，保存量が現れるということ自体は自由電子系の示す不変性または対称性から直ちに読み取れる．ディラック方程式とラグランジアン(2.1)は，電子の場の位相を

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\mathrm{e}^{i\theta}\psi(x)\quad(\theta\text{ は任意の実数})\tag{2.2}$$

と変化しても形を変えないことに注意しよう．位相 $\mathrm{e}^{i\theta}$ は数学の可換群 ($U(1)$ 群)をなすので，自由電子系が示すこの位相変換に関する不変性を $U(1)$ 対称性と呼ぶ．電子場の位相はラグランジアンに陽に顔を出さない“循環”座標であり，解析力学の定理によると，それに共役な (一般) 運動量が保存する．この保存量が電荷なのである．一般に力学系が連続的対称性をもつときには必ず保存量が現れる．これを教える便利な定理を紹介しよう．

ネーターの定理[9)]

ボソンとフェルミオンをまとめて $\phi_j(x)(j=1\sim n)$ と記す．場の連続的な変換に対しラグランジアン $L[\phi,\partial_\mu\phi]$ が不変であるとする．変換は N 個のパラメター θ_a で指定されるとし，場の微小変換を $\delta\phi_j(x)=i\sum_a G_{ja}[\phi]\delta\theta_a$ と書こう．ラグランジアンの不変性

$$\delta L=\sum_j\left\{\frac{\partial L}{\partial\phi_j}\,\delta\phi_j+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}\,\partial_\mu\delta\phi_j\right\}=0$$

に，ϕ_j の満たす運動方程式 $\partial L/\partial\phi_j-\partial_\mu\{\partial L/\partial(\partial_\mu\phi_j)\}=0$ を組み合わせると，N 個のカレント

$$j_a^\mu(x)=\sum_j G_{ja}[\phi(x)]\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_j(x))}\tag{2.3}$$

の保存 $\partial_\mu j_a^\mu(x)=0$ が導かれる．このカレントをネーター・カレントという．保存するチャージは $j_a^0(x)$ の全空間にわたる積分として与えられる．

電流 $j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ が位相変換 (2.2) に付随するネーター・カレントであることは今や明らかであろう．電荷のような物質の内在的性質に関する対称性をゲージ対称性といい，式 (2.2) のような変換を (大域的) ゲージ変換と呼ぶ．

対称性(または循環座標)の出現は，力学系のもつ自由度が見かけよりも小さいことを意味する．量子論では，人が自由に指定できる循環座標は物理的に意

味のない(観測にかからない)自由度と見なし，物理量は循環座標によってはならないと考える．物理量である電流 $j_\mu(x)$ は電子場の位相によっていないことに注意しよう．

ネーター (Noether) の定理は本来古典力学の定理であるので，量子論ではその妥当性を個々の場合に吟味しなくてはならない．ネーターの定理の量子論における修正が量子異常である．

ネーターの定理は時空対称性にも適用できる．自由電子のラグランジアン (2.1) は相対論の要請を満たしているので，ポアンカレ変換(ローレンツ変換と時空並進) 不変性をもつ．よく知られているように，エネルギー，運動量，角運動量等が保存する．

質量ゼロの粒子の場合，その時空対称性はコンフォーマル対称性に拡大する．コンフォーマル変換は，ポアンカレ変換のほかにスケール変換と特殊コンフォーマル変換からなる．そのネーター・カレントは，エネルギー・運動量テンソルとそのモーメントの形に書くことができる．

仮に質量 $m \to 0$ とすると，電子のもつ内部対称性も拡大する．粒子の運動方向のスピン成分をその粒子のヘリシティというが，これは空間回転に対して不変な量である．さらに，光速で走る粒子の進行方向は，その方向に沿うどのような慣性系を選んでも反転できないことに注意すると，質量ゼロの粒子のヘリシティは相対論的に不変な保存量であることがわかる．正ヘリシティ (右巻き) をもつ粒子の数と負ヘリシティ(左巻き)をもつ粒子の数が別々に保存する．質量ゼロのフェルミ粒子のヘリシティ保存を表す対称性がカイラル対称性である．ディラック行列 γ^μ と反交換する行列 $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ($\{\gamma^\mu, \gamma_5\}=0, (\gamma_5)^2=1$) の固有値 ($\pm 1$) を，フェルミ粒子のカイラリティという．質量のないフェルミ粒子の場合，そのカイラリティはヘリシティの 2 倍に等しい．カイラリティ (± 1) をもつフェルミ場

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \qquad \psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \tag{2.4}$$

を，それぞれ右手および左手のカイラル・フェルミ場と呼ぶ．右手と左手のフ

ェルミオンの数が独立に保存する*. 実際, $m=0$ とした自由場のラグランジアン(2.1)は, カイラル $U(1)_R \times U(1)_L$ ゲージ変換

$$\psi_R(x) \to e^{i\theta_R}\psi_R(x), \qquad \psi_L(x) \to e^{i\theta_L}\psi_L(x) \tag{2.5}$$

に対し不変である. $\theta_V=(1/2)(\theta_R+\theta_L)$, $\theta_A=(1/2)(\theta_R-\theta_L)$ と組み変えて, カイラル変換を $U(1)_V \times U(1)_A$ 変換

$$\psi'(x)=e^{i(\theta_V+\theta_A\gamma_5)}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{i(-\theta_A+\theta_A\gamma_5)} \tag{2.6}$$

に書き直すと, 位相 θ_V と θ_A はそれぞれ電荷の保存とヘリシティの保存に関係することがわかる. 後者に関係する保存ネーター・カレントは, 軸性カレント

$$j_5^\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) \tag{2.7}$$

である. 電子の質量がゼロでないときでも, ネーターの定理を少し拡張すると, 軸性カレントの保存則

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\, j_5 \tag{2.8}$$

を導くことができる. $j_5=\bar{\psi}\gamma_5\psi$ は擬スカラー密度を表す. 質量項はヘリシティ保存を表す軸性 $U(1)$ 対称性を損なうのである.

質量のないフェルミ粒子が N 種類あるときには保存量の数が増えるので, カイラル対称性も大きくなる. N 個の場を $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_N)^t$ のようにベクトル表示すると, 任意のユニタリー行列による成分の入れ換え $\psi_R(x)\to U_R\psi_R(x)$, $\psi_L(x)\to U_L\psi_L(x)$ に対し運動方程式もラグランジアンも不変となる. これを $U(N)_R\times U(N)_L$ カイラル対称性という. 式 (2.6) で位相を $U(N)$ 行列と見なし, $\theta_{R,L}$ をエルミート行列の適当な (N^2個の) 基底 $\{T^a\}$ で $\theta_{R,L}=\theta^a_{R,L}T^a$ と展開すると, $2N^2$ 個の独立な変換があることがわかる. その結果, 同数のネーター保存カレントが得られる. フェルミオンが質量をもつと, そのパターンに応じて保存量の数が減り, 対称性も小さくなる.

2・2　ゲージ理論

前節で見たように, 自由に選ぶことができる電子場の(時空全体で一様な)位

---

* 正確にいうと, ψ_R は正ヘリシティ (右巻き) 電子と, その反粒子である負ヘリシティ (左巻き) 陽電子を表す.

相は観測不可能な量である．試みに電子の位相を時空の各点で自由に変えてみよう：

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\mathrm{e}^{i\theta(x)}\psi(x) \tag{2.9}$$

このような局所ゲージ変換のもとでは，場の微分 $\partial_\mu\psi$ がうまく変換しないので，運動方程式は形を変えてしまう．これは異なる時空点における電子場の位相の差は物理量であって，勝手には選べないからである．あえて場の相対位相まで自由に選べるようにするには，位相の時空変化を吸収する場を導入することが必要である．この新しい自由度をゲージ場といい，ベクトル場となるので $A_\mu(x)$ と表そう．

物質場の微分 $\partial_\mu\psi$ を，共変微分と呼ばれる微分

$$D_\mu[A]\psi(x)=\{\partial_\mu-ieA_\mu(x)\}\psi(x) \tag{2.10}$$

に置き換え，ゲージ場の変換を

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+(1/e)\partial_\mu\theta(x) \tag{2.11}$$

と定義すると，物質場の微分は $D_\mu[A']\psi'=\mathrm{e}^{i\theta}D_\mu[A]\psi$ と斉次に変換するようになる．したがって，自由電子のラグランジアンで $\partial_\mu\to D_\mu[A]$ と置き換えて作った新しいラグランジアン

$$L_\psi=\bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)-m]\psi \tag{2.12}$$

は，望む局所対称性をもつことになる．ゲージ場の運動項も不変性から決められる．ゲージ場の一階微分を含みゲージ変換のもとで不変な量は

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{2.13}$$

であるので，ゲージ場のラグランジアンとして

$$L_A=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \tag{2.14}$$

を選ぶのが自然である．このように構成されたゲージ場の理論が，電子と光の相互作用を記述するマクスウェルの電磁気学にほかならない．実際，ラグランジアン L_A+L_ψ からゲージ場の方程式としてマクスウェルの方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=-ej^\nu \tag{2.15}$$

が導かれるので，A_μ は電磁場（のポテンシャル）を表すことがわかる．このよ

うに，ゲージ場の導入により局所的な内部対称性をもつ理論を構成する手続きをゲージ原理という[3,9,10].

ゲージ場は遠く離れた場の相対位相をも吸収しなくてはならないので，その影響は無限の遠方に到達する．したがって，ゲージ場は質量をもたない．

ゲージ原理を大きい内部対称性をもつ理論に適用すると，非可換（群の構造をもつ）ゲージ場，ヤン-ミルズ（Yang-Mills）場が得られる[3]．具体例として，共通の質量をもつ N 個の物質場の系を考えよう．$U(N)_{\mathrm{V}}$ 対称性のうち単純群をなす $SU(N)$ 対称性の部分を局所化する．$SU(N)$ の微小変換は (N^2-1) 個あることに注意して，同数のゲージ場 $A^a_\mu(x)$ を導入し，行列場 $A_\mu(x)=A^a_\mu(x)T^a$ にまとめる*．物質場の $SU(N)$ 変換を $\psi'(x)=U^{-1}(x)\psi(x)$ と局所化する．このときゲージ場が

$$A_\mu(x)\to A_\mu'(x)=U^{-1}(x)\{A_\mu(x)+(i/g)\partial_\mu\}U(x) \qquad (2.16)$$

と変換すれば，微分 $D_\mu[A]=\partial_\mu-igA_\mu(x)$ は $D_\mu[A']=U^{-1}D_\mu[A]U$（$g$は結合定数）と斉次に変換するようになる．そこで，物質場の微分の置き換え $\partial_\mu\to D_\mu[A]$ により，局所 $SU(N)$ 対称性をもつ理論を作ることができる．電磁場 $F_{\mu\nu}$ に対応するものは，行列場

$$F_{\mu\nu}[A]=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu,A_\nu]=F^a_{\mu\nu}[A]T^a \qquad (2.17)$$

であり，$F_{\mu\nu}[A']=U^{-1}F_{\mu\nu}[A]U$ と変換する．ラグランジアンを

$$L=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}[A]^2+\bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu-igA_\mu)-m]\psi \qquad (2.18)$$

ととると$SU(N)$ゲージ理論は形の上でも電磁気学の自然な拡張になっている．

クォークはu,d,s,... という香り（フレーバー）をもち，各香りごとに（赤，青，緑とよぶ）3種の色をもっている．ラグランジアン (2.18) において，ψ を3種の色をもつクォーク場，A^a_μ を8種のグルーオン場とした色の $SU(3)$ ゲージ理論が，強い相互作用の基礎理論である量子色力学（QCD）である[2]．QCDの特徴は，クォークとグルーオンの相互作用が高エネルギー（短距離）領域で弱くなり，低エネルギー領域（1 GeV 以下）で強くなるという性質であり，漸近自由

---

* 基底 $\{T^a\}$ は $\mathrm{tr}(T^aT^b)=(1/2)\delta^{ab}$ と規格直交化されているものとする．

性 (asymptotic freedom) と呼ばれる．ヤン-ミルズ場のもつ自己相互作用が色荷を逆遮蔽するように働くことが，その原因である．可換ゲージ理論である量子電磁力学はこれと逆の性質をもつ．QCD では色の対称性は厳密に保たれる．しかし低エネルギーでは色荷どうしの結合が強いので，色荷をもつクォークやグルーオンが単独には取り出せず，無色 (色 1 重項) の複合粒子，ハドロンのみが観測されるという“色の閉じ込め”現象が起こる[11,12]．一方，高エネルギー粒子・反粒子消滅反応実験で観測されるジェット状のハドロン集団 (ハドロン・ジェット) は，高エネルギーで自由に振舞うクォークとグルーオンの様子をよく表しており，QCD の正しさを示す強い証拠となっている．

歴史的には，軽いクォークの香りが示す近似的な対称性をカイラル対称性と呼んだ[13]．特に，裸の u, d クォークは軽い (数 MeV) ので， $U(2)_{\rm R}\times U(2)_{\rm L}$ 対称性は QCD のよい近似的対称性である．

クォークとレプトンの左手カレントが示す弱い相互作用の弱アイソスピン $SU(2)$ 対称性と弱超荷 $U(1)$ 対称性をもとに構成された $SU(2)_{\rm W}\times U(1)_{\rm Y}$ ゲージ理論が，標準模型またはワインバーグ-サラム (Weinberg-Salam) 模型[1]と呼ばれる電弱統一理論である．この理論では，ヒッグス粒子と呼ぶボース粒子を導入してゲージ対称性を自発的に破り，最終的に電磁 $U(1)$ 対称性のみを残す．その結果，弱い相互作用を媒介するゲージ粒子 ($\rm W^{\pm}$, Z^0) が質量をもつようになり (ヒッグス機構)，QCD のような閉じ込めは起こらない．理論の予言通りの質量をもつ $\rm W^{\pm}$, Z^0 粒子が実際に見つかったことは，電弱統一理論の輝かしい成果であるとともに，ゲージ原理に基づいてすべての相互作用を統一する究極理論への展望を明るくする．

ゲージ理論は局所対称性を実現しているので，保存量が無数に現れるように思えるが，そうではない．局所不変性に由来する保存量が，ゲージ場の運動方程式によって恒等的にゼロになってしまうのである*．量子論に進むと，このゼ

* 電磁力学では，局所ゲージ変換から無限個のネーター・カレント $G^{\mu}=\theta(\partial_{\nu}F^{\nu\mu}+ej^{\mu})$ が導かれるが，これはマクスウェル方程式 (2.15) と組み合わせるとゼロになってしまう．非可換ゲージ理論でも同様である．

ロとなる保存量はどのようなものが物理量(観測可能量)となるか判定する役割を果たす．直観的にも明らかなように，電子場の位相によらない，つまりゲージ(変換に対して)不変*な量のみが物理量となる．

ゲージ原理は物質場の内部自由度に結びつく新しい場を導入する手続きである．局所ゲージ対称性はそのための指針であり，保存量を増やすためではない．アインシュタインの重力理論の基盤である一般相対性原理もこの意味では同類で，物質系に重力場との相互作用を導入するしかたを決めるのである．

一方，物質場のみの系で局所的な対称性が実現するときには，保存量が無限個現れる．その例としては，2次元空間におけるコンフォーマル対称性と局所カイラル対称性が挙げられる(§5•3参照)．

---

*　特に断らない限り，今後ゲージ不変というときには局所ゲージ変換に対する不変性を意味する．

3章　ゲージ理論における量子異常

前の章で構成されたゲージ理論はまだ古典論である．量子論に進むとどのような問題が生じるか，量子電磁力学を例にして考察しよう．

3・1　電流保存と正則化

ラグランジアン (2.12) に見るように，電子は電流 $j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ を通して光（電磁場）と結びつく．電流はカイラル・フェルミ場を用いて

$$j^\mu(x)=\bar{\psi}_{\rm R}(x)\gamma^\mu\psi_{\rm R}(x)+\bar{\psi}_{\rm L}(x)\gamma^\mu\psi_{\rm L}(x) \tag{3.1}$$

と表されることからも明らかなように，カイラル変換 (2.5) のもとで不変である．光と電子の基本の相互作用 $A_\mu j^\mu$ は必ず時空の 1 点で起こる局所相互作用である．その様子を図 3.1に示した*．光は電気的にもカイラリティに関しても

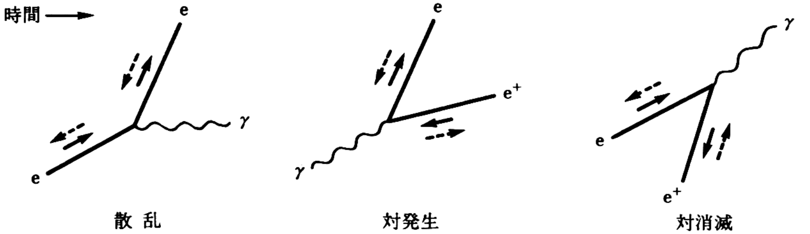


図 3.1　電子(e)と光(γ)の相互作用

電子(または陽電子 e^+)の伝播線に沿う矢印はスピンの向きを表す．図には右巻き電子 e_R(と左巻き陽電子)の場合を描いたが，左巻き電子(と右巻き陽電子)の場合も点線の矢印で示した．どちらの場合も同じ割合で起こる

---

* 電流 (3.1) に現れる $\psi_{\rm R}$ は入射する右巻き電子または出射する左巻き陽電子を表し，$\bar{\psi}_{\rm R}$ は出射右巻き電子または入射左巻き陽電子を表す．

中性である*．電子（と陽電子）の電荷とヘリシティが，散乱・対発生・対消滅の各反応の前後で保存していることは図から明らかであろう．もちろん，ネーターの定理からも電流保存則 $\partial_\mu j^\mu=0$ と軸性カレントの保存則 (2.8) を導くことができる．

量子論でこれらの保存則が実際に成り立つかどうか調べることがこの章の目的である．場の量子論における系統的な計算方法である摂動論を用いて考察を進めよう．ただし，§3・3で説明するように光の量子効果はあまり重要ではないので，以下では電磁場を外場（古典場）と見なし，電子のみを通常の正準理論にしたがって量子化した量子場として取り扱うことにする．

外場を摂動と考え相互作用表示の摂動論を構成すると，散乱行列は

$$S[A]=T\exp\left[ie\int \mathrm{d}^4x\ A_\mu(x)j^\mu(x)\right] \tag{3.2}$$

と表される．T は T 積を意味する．行列要素＜終 $|S[A]|$ 始＞は外場の影響のもとに始状態｜始＞が終状態に遷移する散乱振幅を与える．それを図示したものがファインマン図である．図3.2には，1個の電子が外場による散乱と対発生の後に2個の電子と1個の陽電子になる過程を描いた．途中には電子のループ（対発生につづく対消滅）も現れている．電子のループを表す図をループ図といい，電子（または陽電子）の開いた伝播線のみからなる部分をトリー図という．散乱振幅は両者の振幅の積となる．

自由電子の電荷は変化しない．電子の質量の影響で電子のヘリシティは変化するが，その変化は自由な伝播の間に限られ，電磁相互作用では変化しない．したがって，どのように複雑なファインマン図を考えようとも，電子の伝播線

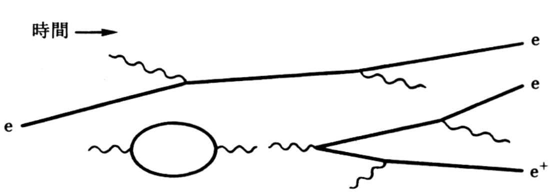


図 3.2　ファインマン図

*　光のもつヘリシティ (±1) はカイラリティとは見なさない．

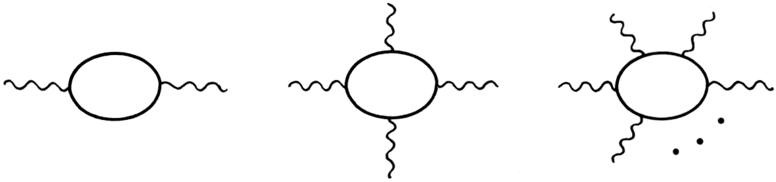


図 3.3 ループ図．(a)の発散はくりこみによって処理する．正則化すると(b)の発散は消える

が途切れない限り，電流の保存と軸性カレントの保存則 (2.8) は自明のことのように思える．実際，トリー図のすべてとループ図のほとんどについては，その振幅は有限であり，これらの保存則は自動的に満たされる．例外は 1 つの電子ループに 4 個以下の外場がつく場合である (図3.3)．このようなループ図の振幅には紫外発散が現れるので，吟味が必要となる．

ループ図は外場が誘起する電子場の量子的ゆらぎ(真空偏極)を表している．ループの広がりはゆらぎの波長を表すと見なしてよい．いくらでも短い波長の場のゆらぎが存在するので，電子ループも無限に小さくなりうる．上述の例外としたループ図ではこの極限が特異で，その値が極限のとり方によってしまう．これが紫外発散である．ループの収縮のしかたによっては電流の保存が破れてしまう．そこで，電流が正しく保存するように電子ループの発散を制御する必要が生じる．この手続きを正則化 (regularization) という．

代表的な正則化の方法は次元法と PV (Pauli-Villars) 法である[9]．次元法では 4 次元の理論を発散のない低い次元の理論からの解析接続により定義する．PV 法では，量子ループの寄与が有限になるように摂動論のファインマン則を変更する．いわば電子の伝播線をぼかすことにより発散を抑えるのである．以下の考察ではこの考え方のみを用い，方法の詳細は必要としない．

ここで，マクスウェルの方程式(2.15)に左から∂_νを演算すると電流保存が導かれることに注目しよう．量子論ではマクスウェルの方程式は演算子の方程式になる．したがって電流保存は量子論においても厳密に成り立たなくてはなら

ない．さもないとマクスウェルの方程式が自己矛盾する．

すべてのループ図の寄与を足し上げると，$S[A]$ の自由電子の真空についての期待値

$$W[A]=<0\,|\,S[A]\,|\,0> \tag{3.3}$$

にまとまる．$W[A]$ は外場による電子場の量子的ゆらぎを表すが，逆に電子場のゆらぎが作りだす光の実効相互作用とみてもよい．すると，$W[A]$ はゲージ不変な構造をもっていなければならないことは明らかである．そうでないと，物質場の量子的ゆらぎによってゲージ理論の基礎である局所ゲージ不変性が損なわれ，量子論は自己矛盾してしまう．外場の微小ゲージ変換 (2.11) に対する $W[A]$ の応答を考えてみると (§6・1参照)，電流保存 $\partial_\mu j^\mu=0$ は物質場の量子的ゆらぎのゲージ不変性を保証することがわかる．この意味でゲージ不変性と電流保存は同義語と考えてよい．

電流のように，ゲージ場が結びつく物質場のカレントを一般にゲージ・カレントという．ゲージ・カレントの保存 (非可換ゲージ場の場合は共変的な保存) はゲージ場の量子論が自己矛盾をもたないための基本要請であり，それを実現する正則化法が存在することが必要である．非可換ゲージ理論も含めて，ベクトル・ゲージ理論 (軸性結合を含まない) は PV 法や次元法により必ずゲージ不変性を保つように正則化できる．

3・2　カイラル量子異常

発散を含むループ図は正則化の手続きによってその構造が変化する (ぼける)．したがって，トリー図や有限なループ図とは異なり，発散ループ図の場合にはヘリシティの保存則が正常であるかどうか自明でない．そこで軸性カレントの保存則を直接検討してみよう．摂動論で軸性カレントの行列要素を計算するには，散乱行列を表すファインマン図 (図3.2) において電子の伝播線にあらゆる可能なやり方で $j_5^\mu(x)$ を挿入すればよい．今は $j_5^\mu(x)$ を電子ループに挿入した場合のみを考察すれば十分である．ループ図の寄与は軸性カレントの真空期待値 $\langle 0|\,j_5^\mu(x)\,|0\rangle$ にまとめられ，摂動論では

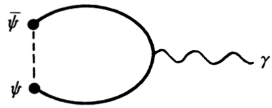


図 3.4 正則化した軸性カレントのループ

$$<0|\,Tj_5^\mu(x)S[A]\,|0>/W[A] \tag{3.4}$$

と表される*.

軸性カレントを含む電子のループを正則化するために，ここでは軸性カレントを

$$j_5^\mu(x\,;\,\epsilon)=\bar{\psi}(x+\epsilon/2)\gamma^\mu\gamma_5\Gamma[A\,;\,\epsilon]\psi(x-\epsilon/2) \tag{3.5}$$

のように時間空間的に少し離れた場の積として定義し，すべての計算が終わったのちに $\epsilon^\mu\to 0$ とすることにしよう[14]. このようにすると，軸性カレントが ϵ^μ ほどのサイズに拡がるので，電子ループはこれよりも小さくはならない（図3.4）. つまり，ϵ^μ より小さい波長（または周期）の電子場のゆらぎが抑えられる. 上式では $\epsilon^\mu\neq 0$ であっても $j_5^\mu(x;\epsilon)$ がゲージ不変となるように，位相因子

$$\Gamma[A\,;\,\epsilon]=\exp\left[ie\int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2}\mathrm{d}z^\mu A_\mu(z)\right] \tag{3.6}$$

を導入した. 軸性カレントは電子のヘリシティの流れを表す物理量であるので，電子場の位相によらないように工夫したのである. ゲージ理論ではゲージ不変な量のみが物理量である.

正則化により軸性カレントが演算子として明確な意味をもつようになったので，電子の満たすディラック方程式

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)-m\}\psi(x)=0 \tag{3.7}$$

を用いて，その保存則を求めることができる. 結果は

$$\partial_\mu j_5^\mu(x;\epsilon)-2imj_5(x;\epsilon)=ie\epsilon^\nu j_5^\mu(x;\epsilon)[F_{\mu\nu}(x)+O(\epsilon^2)] \tag{3.8}$$

となる. ここで $j_5(x;\epsilon)$ は，式 (3.5) と同様に正則化したゲージ不変な擬スカラ

* 外場中でハイゼンベルク表示の真空 $|0)$ は自由場の真空 $|0>$ からずれる. 上式において $W[A]$ で割るは，そのずれを補正するためである.

一密度である．正則化により軸性カレントの保存則が修正を受けることがわかった．修正項は演算子としては $O(\epsilon)$ であり，その行列要素は真空期待値（ループ図）を除いてすべて $\epsilon^\mu\to 0$ とともにゼロとなる．一方，真空期待値 $(0\,|\,j_5^\mu(x;\epsilon)\,|\,0)$ は $\epsilon^\mu\to 0$ で特異性を示すので，その一番強い特異性を単純な摂動計算で求めると（図3.4）

$$(0\,|\,j_5^\mu(x;\epsilon)|\,0)=-(ie/4\pi^2)\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}[A(x)]\epsilon_\nu/\epsilon^2+O(\epsilon) \qquad (3.9)$$

となる．$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ は完全反対称テンソルである（$\epsilon^{0123}=-1$ と定義した）．したがって，$\epsilon^\mu\to 0$ としても修正項は有限に残り*，量子論の軸性カレントの保存則を表す演算子の方程式

$$\partial_\mu j_5^\mu-2imj_5=\frac{e^2}{16\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}=\frac{e^2}{2\pi^2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (3.10)$$

が得られる．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の内積の形に書かれる修正項がカイラル（または軸性）異常項（Adler-Bell-Jackiw 異常項）である[6)]．ここでは運動方程式を用いて変形をしたが，直接に $\partial_\mu j_5^\mu(x\,;\,\epsilon)$ をファインマン則を用いて評価するときには図 3.5 の“三角”図を考えることになる．もちろん同じ結果が得られるが，この三角図にちなんで異常項を三角異常項と呼ぶこともある．

$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$ なる電磁場中では電子のヘリシティの保存則に異常が生じることが明らかになった．その直接の原因は，式 (3.5) に見るようにフェルミ場の短波長の量子ゆらぎが軸性カレントの性質を変化したからである．根本の原因は，同じ量子ゆらぎのために電磁相互作用が電子のヘリシティの保存を破るようになったからである．この事実を直接見るには，例えば式 (3.5) に倣ってゲ

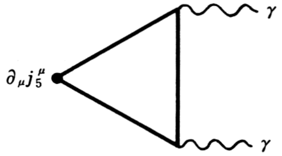


図 3.5　三角図

* 通常 ϵ^μ の方向について平均してから $\epsilon^2\to 0$ とするが，ここの答は平均化のしかたによらない．真空中に誘起された軸性カレント (3.9) は平均化によりゼロになるが，その特異な偏極の効果が異常項を生み出したのである．

ージ不変で正則な電流の演算子 $j^\mu(x;\epsilon)$ を構成してみるとよい．この電流は保存するが，局所軸性変換に対しては不変にならない．このため，電子の伝播線がこの電流の中で一時とぎれた際に，致命的なヘリシティの不連続が起こるのである．

時空の中に連続的に分布する場という無限個の自由度が，場の理論の紫外発散とともに量子異常を生み出す．発散がなければ量子異常も現れないが，自由場の場合を除き，場の理論は必ず発散を含む．発散は量子場の積に潜んでいる．一般に，正準共役な 2 つの量子場の積は同一時空点で特異性を示し不定となるが，その理由は不確定性関係からもわかる．$\bar{\psi}$ と ψ を近づける，つまり両者の相対位置を確定するにつれ，相対運動量の不確定性が限りなく大きくなり，特異性が生じるのである．電流も軸性カレントも形式的に $\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ の積の形に書かれるので，その明確な定義（正則化）が本来必要である．そして異常項の出現は正則化の必然的な結果である．

電流の場合と異なり軸性カレントについては，その保存を要求するような独立な運動方程式は存在しない．軸性異常項が出現しても理論に矛盾は生じない．それどころか量子異常は観測にかかる物理量であり，異常項により初めて説明できる現象も少なくない．その実験的検証については 6 章で解説する．

カイラル異常項は全微分の形 $\partial_\mu K^\mu (K^\mu \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} A_\nu F_{\rho\lambda})$ に書ける．この特徴に注目して $\hat{j}_5^\mu = j_5^\mu - K^\mu$ を新しく軸性カレントとして採用すると，異常項は一見消失する．ところが $\hat{j}_5^\mu$ はゲージ不変ではないので，物理量（観測可能量）ではない．このように異常項を除去しようと試みると，必ずどこかに無理が生じるが，もちろんこれは異常項が物理量であるから当然のことである．弱い相互作用のように，軸性カレントと物質場の結びつきを考えるときには必ずゲージ不変な j_5^μ を採用しなくてはならない．

異常項は $\partial_\mu K^\mu$ と書けるので，長波長ではその効果は目立たない．面白いことに，K^μ をゲージ変換すると全微分になるので，$\hat{j}_5^\mu$ から作られるカイラル荷 $\hat{Q}_5 = \int d^3x\ \hat{j}_5^0(x)$ はゲージ不変な物理量となる．電子の質量がゼロの極限では保存量でもある．この $\hat{Q}_5$ も j_5^0 から作られる Q_5 のどちらも，大域的カイラル変

換 (2.6) の生成子としては正しく振舞うことが示せる (5章参照). この意味で異常項は大域的対称性を損なわない. 異常項の影響は対称性の局所的側面にのみ現れるのである.

前節で述べたように, ベクトル対称性 (ベクトル・カレントの保存) は正常に保つことができるので, 量子異常は一般に (非可換群の場合も含めて) 軸性対称性に現れる. フェルミ場の伝播線をぼかすと軸性対称性は破れるのである. 大域的対称性の量子異常は保存則の変更を引き起こすが, それは物理的に意味のある変更である. 一方, 局所ゲージ対称性の異常 (＝ゲージ・カレントの非保存) は量子論の自己矛盾を意味するので, その出現は避けなければならない. 例えば, 軸性カレントに結びつくゲージ場を導入した“カイラル”量子電磁力学は異常項の出現のために量子論として不適格である. 自己矛盾を避けるには, 物質場の内容をうまく調整して有害な量子異常が打ち消すようにすればよい. この「異常項打ち消し」の要請は新しい素粒子の模型を構築する際の重要な指針となる (6章参照).

3・3　アドラー–バーディーン定理

光の量子的ゆらぎを考慮にいれても, 式(3.10)のカイラル異常項は変更を受けない, つまり高次の輻射補正がないことが知られている. アドラー (Adler) とバーディン (Bardeen) により示されたこの定理[15]を要約して説明する.

光の量子的ゆらぎを考慮するには, ファインマン図でフェルミ場の伝播線につく光の線どうしを結びループを構成すればよい. ループに沿って流れる光の運動量について積分すると, さまざまな波長の光のゆらぎが足し上げられる. 短波長の光のゆらぎから新たな異常項が生じないことがいえれば, 異常項に対する高次の補正がないことを結論できる. そこで定理の証明は, 光のループ積分が収束するように理論を正則化できるかどうかにかかってくる. 実際にこのようにできるのである.

まず光 (のプロパゲータ) をある適当なスケール λ を境にして長波長成分と短波長成分に分け, 後者を人為的に抑制する. 抑制操作の詳細はここで必要と

しない．重要なことは，この操作がゲージ不変性を損なわずに実行できる点である．この操作により，ほとんどのファインマン図は収束するようになる．ただ，1個のフェルミオンのループからなる光の自己エネルギー図（図3.3(a)）（とそのくり返し）のみは影響を受けず発散するので，その発散は光の場にくりこむことにする．これは，裸の電荷 e_B と裸の光の場 A_B^μ のくりこみ $e_I = e_B\sqrt{X_3}$ と $A_I^\mu = A_B^\mu/\sqrt{X_3}$ を引き起こす（発散はくりこみ定数 X_3 に吸収した）．この手続きを中間くりこみという．

この中間くりこみを施した理論から出発すると，ゲージ不変性を保つ有限な摂動論が構成できる．電荷 e_I と電子の裸の質量 m_B と電子場のくりこみ定数 Z_2 はくりこまれた電荷 e_R と質量 m_R とスケール λ の有限な関数となる．つまり中間くりこみをすると，光の量子的ゆらぎが静まってしまうのである．カイラリティをもたない光自身の量子ゆらぎからカイラル異常は生じない．また，静まった光のゆらぎが電子場のゆらぎを増強することもない．結局，カイラル異常項は電子場の量子的ゆらぎのみで決まることになる．

中間くりこみを行った効果として，異常項中の演算子の構造はすべて裸の量からなる $e_B^2\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_B^{\mu\nu}F_B^{\rho\lambda}$ を表すことがわかる．この量はくりこみに関して不変な量であり，くりこまれた量 $e_R^2\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_R^{\mu\nu}F_R^{\rho\lambda}$ に等しい．異常項が有限な物理量であることが確認できたことになる．

異常項が高次補正を受けないというこの定理の結論から，異常項が偶然の量子効果ではない何か深い意味をもつものであるという予感が湧くであろう．次章でこの点を考察する．

4章　カイラル異常項とゲージ場の幾何学

4·1　藤川の方法

前章では摂動論を用いてカイラル異常項を求めた．摂動論とは本質的に異なる量子異常の定式化が藤川により考案された[16]．知られている量子異常はすべて藤川の方法で統一的に記述できるばかりでなく，この方法はカイラル異常項がゲージ場の幾何学的性質の現れであることをも明らかにする．以下でこの方法を説明しよう．

物質場の量子的ゆらぎを特徴づける式 (3.3) の $W[A]$ は，汎関数積分（ファインマンの経路積分）を用いて

$$W[A]=\int[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}]\exp\left[i\int \mathrm{d}^4x\,\bar{\psi}(iD[A]-m)\psi\right] \tag{4.1}$$

と表示できる[17]．ここで $D[A]\equiv\gamma^\mu\{\partial_\mu-ieA_\mu(x)\}$ である．記述を簡単にするために，以下では $m=0$ とする．電子場の局所カイラル変換

$$\psi'(x)=\mathrm{e}^{i\{\theta_\mathrm{V}(x)+\theta_\mathrm{A}(x)\gamma_5\}}\psi(x),\qquad \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{-i\{\theta_\mathrm{V}(x)-\theta_\mathrm{A}(x)\gamma_5\}} \tag{4.2}$$

を考えよう．式 (4.1) で，積分変数である場を $\psi\to\psi'$，$\bar{\psi}\to\bar{\psi}'$ と置き換えても $W[A]$ の値は変化しない．そこで，もし積分の測度がこの変換に対して不変（$[\mathrm{d}\psi'][\mathrm{d}\bar{\psi}']=[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}]$）であれば，ラグランジアンの変化分

$$\delta L=-j^\mu\partial_\mu\theta_\mathrm{V}-j_5^\mu\partial_\mu\theta_\mathrm{A} \tag{4.3}$$

から電流と軸性カレントの保存が導かれる．実は，積分測度は（注意深く定義すると）局所カイラル変換に対し不変にはならず，変換のヤコビアン因子からカイラル異常項が現れる．これが藤川の方法である．

汎関数積分測度 $[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}]$ を量子論として明確に定義するには次のようにす

る．まずディラック演算子 $D[A]$ の固有関数を導入する：

$$
\begin{aligned}
D[A]\phi^{(n)}(x)&=\lambda_n\phi^{(n)}(x),\\
\bar{\phi}^{(n)}(x)D[A]&=\lambda_n\bar{\phi}^{(n)}(x).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

第二式の $D[A]$ 中の微分は符号を変えて左の $\bar{\phi}$ にかかるものとする．共通の固有値 λ_n に属する $D[A]$ の右固有関数 $\phi^{(n)}(x)$ と左固有関数 $\bar{\phi}^{(n)}(x)$ は直交するようにとれる：

$$
\sum_\alpha\int \mathrm{d}^4x\,\bar{\phi}_\alpha^{(n)}(x)\phi_\alpha^{(m)}(x)=\delta_{nm}. \tag{4.5}
$$

(場の成分を表す添え字を陽に書いた)．この内積に対応した完全性の関係式も書き下すことができる．フェルミ場をこれらの固有関数で

$$
\psi_\alpha(x)=\sum_n a_n\phi_\alpha^{(n)}(x), \qquad \bar{\psi}_\alpha(x)=\sum_n b_n\bar{\phi}_\alpha^{(n)}(x) \tag{4.6}
$$

と展開し，展開係数 a_n, b_n を用いて積分測度を

$$
[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}]\equiv\prod_n \mathrm{d}a_n\mathrm{d}b_n \tag{4.7}
$$

と定義することにする．

変数変換 (4.2) を a_n, b_n に関する変数変換に焼きなおして，ヤコビアン $\partial(a',b')/\partial(a,b)$ を計算すると*

$$
\exp\left[-2i\int \mathrm{d}^4x\,\theta_\mathrm{A}(x)\sum_n\bar{\phi}^{(n)}(x)\gamma_5\phi^{(n)}(x)\right] \tag{4.8}
$$

となる．ここで恒等式 $\{D[A],\gamma_5\}=0$ に着目すると

$$
D[A]\gamma_5\phi^{(n)}(x)=-\lambda_n\gamma_5\phi^{(n)}(x) \tag{4.9}
$$

となるので，$D[A]$ の固有値のうちゼロでないものは常に対 $\pm\lambda_n$ をなすことがわかる．そして，その固有関数 $(\phi^{(n)}(x),\gamma_5\phi^{(n)}(x))$ からはカイラリティ ±1 をもつ対**が構成できる．これは重要な点である．このことから直ちに，式 (4.8) に現れるモードの和の中でカイラリティの対をなすこれらのモードの寄与が打ち消し合うことがわかる．$\lambda_n=0$ の固有関数 (ゼロ・モード) のみがカイラリティのアンバランスを生じうる．非ゼロ・モードの寄与が確実に打ち消すように

---

* フェルミ場の変換のヤコビアンは通常の場合の逆数になる．

** 具体的に書くと $(1/2)(1\pm\gamma_5)\phi^{(n)}$ である．左固有関数についても同様である．

収束因子 $e^{-\tau\lambda_n^2}(\tau>0)$ を式 (4.8) に挿入しよう．すると $\phi^{(n)}(x)$ を陽に用いなくてもヤコビアンは明確な意味をもつようになるので，任意の基底に移って

$$\exp\left[-2i\int d^4x\theta_A(x)\,\mathrm{tr}\,(\gamma_5<x\,|\,e^{-\tau D[A]^2}\,|\,x>)\right]\quad(\tau\to 0)\qquad(4.10)$$

と書くことができる．$|x>$ は座標 x^μ の固有状態を表し，tr はフェルミ場の成分添え字に関するトレースである．行列要素を具体的に評価すると

$$\mathrm{tr}\left(\gamma_5<x\,|\,e^{-\tau D[A]^2}\,|\,x>\right)=\frac{e^2}{32\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}\qquad(4.11)$$

となる*．これがカイラル異常項を与える．このヤコビアン因子とラグランジアンの変化分が打ち消すことから，電流保存と軸性カレントの保存則(3.10)が導かれる．

4・2　ゲージ場の幾何学と指数定理

前節で，ゼロ・モードの運ぶカイラリティがカイラル異常項になることをみた．式 (4.8) でゼロ・モードのみを保ち $\theta_A(x)\to$ 一定とすると，異常項は正のカイラリティをもつゼロ・モードの数 N_R と負のカイラリティをもつゼロ・モードの数 N_L の差に比例する．式 (4.11) を使うと

$$N_R-N_L=\frac{e^2}{32\pi^2}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}\qquad(4.12)$$

とも書ける．この数 N_R-N_L はゲージ場 A_μ の配置を少しぐらい変化しても値を変えない (トポロジー) 数であり，ディラック演算子 $D[A]$ の指数と呼ばれる．不変となる理由は容易にわかる．いま A_μ を連続的に変化したとき，あるゼロ・モードが非ゼロ・モードに転化したとしよう．非ゼロ・モードは必ず正負カイラリティの対をなすので，転化を起こしたゼロ・モードもカイラリティの対を組んでいたはずである．N_R と N_L は同数変化するので，その差は不変にとどまることになる．ここで，異常項が全微分の形に書けることを思い出そう．すると，式 (4.12) の右辺の(体積)積分は時空の境界における(面)積分に書き

* 収束因子をゲージ場のべきに展開し，トレース演算と $\tau\to 0$ の極限で残る項を抜き出すと，式 (4.11) が得られる．

直されるので，右辺もやはりゲージ場の大域的な性質のみで決まる（トポロジー）不変量であることがわかる．トポロジー不変量を結びつける関係式 (4.12) はアティヤ-シンガー (Atiyah-Singer) 指数定理[18]として知られる微分幾何学の定理の1つである．

読者はなぜここで幾何学が顔を出すのか不思議に思われるかもしれない．実はゲージ場は微分幾何学の自然な概念なのである．ゲージ場は異なる時空点における荷電場の相対位相を吸収するように導入された．逆にいうと，ゲージ場が与えられると場の相対位相が指定されることになる．時空の各点で定義される荷電場の位相をすべて集めたものをひとつの"空間"と見なすと，ゲージ場はこの空間のつながりかた（相対位相の時空変化）を決める役割を果たす．この働きをさして数学ではゲージ場を接続と呼ぶ．荷電場を時空中の閉じた道に沿って一周（平行移動）させると，一般に場は元の値に戻らない．場の位相がその閉路をよぎる電磁束のぶんだけ変化する．この意味で電場と磁場を数学では曲率と呼ぶ．電磁場が存在すると，（場の位相が張る）"空間"が"曲がる"と考えるのである（本当の時空は曲がらない）．

フェルミ場の場合に，この"曲がった空間"の性質（トポロジー）を特徴づける量が式 (4.12) の右辺なのである*．このように見ると，カイラル異常項の出現はゲージ場の幾何学的属性に由来する非常に基本的な現象である．異常項の構造とその係数が幾何学から決まってしまう．アドラー-バーディーン定理が成り立つ根拠はここにあると考えられる．

フェルミ場のゼロ・モードのみが異常項に効くことから，カイラル量子異常はゲージ理論の長波長の構造に関係する現象であるといえる．一方，3章では量子異常の原因を量子場の短波長のゆらぎと特定した．一見矛盾のように思えるが，3章の見方は時空対称性の場合も含め量子異常一般に当てはまる．ただ，ゲージ量子異常の場合，ゲージ場の幾何学的属性の反映として，長・短両波長現象という二面性が特別に出現するものと考えられる．時空対称性の量子異常

* 特に説明はしなかったが，ボソン場の量子ゆらぎからカイラル異常は生じないし，関係する指数定理もない．

については，このような二面性は知られていない．藤川の方法ではこの二面性が計算手続きの中にも顔を出す．$\{\phi_\alpha^{(n)}(x)\}$ 基底を用いると異常項はフェルミ場のゼロ・モードで表されるが，式 (4.10) のように平面波基底に移ると量子異常は (正則化した) 短波長量子ゆらぎから生じるように見えることに注意されたい．

4·3　カイラル異常項の半古典的描像

指数定理によると，異常項がゼロとならない特別な外場の中ではカイラリティをもつ電子のモードが現れる．この節では，量子異常を外電磁場中のカイラル・フェルミオンの生成として半古典的にとらえる．

カイラル量子異常は一般に偶数次元時空のゲージ理論に現れる．ゲージ理論の諸性質を調べる際に，原型である 1 + 1 次元の量子電気力学を考察すると有益であることが多い．ここでもまず 2 次元の理論を考察しよう．

2 次元でも電気力学のラグランジアンは式 (2.12) で表される．ただ座標が $x^\mu=(x^0, x^1)$ と 2 次元になり，空間回転もスピンの概念もないので電子は 2 成分場 $\psi=(\psi_{\rm L}, \psi_{\rm R})^t$ となることに注意すればよい*．1 + 1 次元時空では軸性カレントの保存則は

$$\partial_\mu j_5^\mu-2imj_5=(e/2\pi)\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-(e/\pi)E \tag{4.13}$$

となる．反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu}$ は $\epsilon_{01}=1$ と定義した．カイラル異常項は電場 $E=F^{10}$ に比例する．

クーロン・ポテンシャルの中で質量ゼロの電子場 $\psi=(\psi_{\rm R}, \psi_{\rm L})^t$ はディラック方程式

$$(\partial_0+\partial_1-ieA^0)\psi_{\rm R}=(\partial_0-\partial_1-ieA^0)\psi_{\rm L}=0 \tag{4.14}$$

に従う．この方程式の解が前節でゼロ・モードと呼んだものである．まず自由電子 $(A^0=0)$ を考えよう．電子のエネルギーを ω，運動量を p と表すと，$\psi_{\rm R}$ は分散 $\omega=p$ をもち $\psi_{\rm L}$ は分散 $\omega=-p$ をもつ．カイラル・フェルミ場 $\psi_{\rm R}$ と $\psi_{\rm L}$ は文字通り右または左に光速で伝播する電子を表し，カイラル対称性は右・左モ

* パウリ行列を用いて，2 次元のディラック行列を $\gamma^0=\sigma_1$, $\gamma^1=i\sigma_2$, $\gamma_5=\gamma^0\gamma^1=-\sigma_3$ ととる．

ードの数の個別な保存を意味する．ディラックの空孔理論の考え方に従って，負エネルギー ($\omega<0$) の電子の準位がすべて詰まった状態を量子論の真空と考える (図4.1)．“ディラックの海”は右と左に進む負エネルギー電子を同数含み，電気的にもカイラリティに関しても中性である．

次に x 軸の正方向 (右) に一様な電場 E をかけよう．ディラックの海の中の電子は ψ_L も ψ_R もともに左向きの力を受ける．古典論の運動方程式によると，時間 $\mathrm{d}t$ の間に ψ_L の運動量は $\mathrm{d}p=eE\mathrm{d}t$ だけ増加する．自由電子の真空を基準にすれば，この運動量の増加は正エネルギー電子の出現 (ψ_L 粒子の生成) と解釈することができる (図4.1)．全空間の長さを L とすると粒子数 (モード数) の変化は $\mathrm{d}N_L=(L/2\pi)\mathrm{d}p$ となるので，時間変化率 $\dot{N}_L=L(eE/2\pi)$ が得られる．一方，右に進む電子 ψ_R は“減速”されるので，その数は時間とともに減少し，その変化率は $\dot{N}_R=-L(eE/2\pi)$ となる．N_R の減少は，右に進む陽電子の生成と解釈できる．したがってカイラリティの変化率は

$$\dot{Q}_5=\dot{N}_R-\dot{N}_L=-\int \mathrm{d}x(e/\pi)E \tag{4.15}$$

となり，式 (4.13) を正しく実現する[19]．$\dot{N}_R=-\dot{N}_L$ であるので，電荷 $Q=N_R+N_L$ は保存している．

この結果から次のような描像が得られる．電場に応答して，まず真空から電

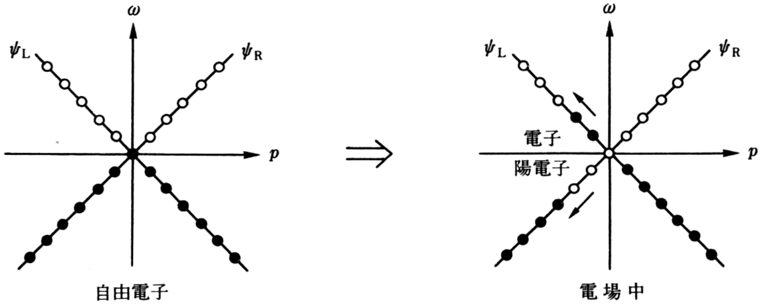


図 4.1　電子のエネルギー準位

詰まった準位を黒丸で，あいている準位を白丸で表した．電場をかけると電子のエネルギー準位が変化し，カイラリティをもつ電子(正エネルギーの黒丸)と陽電子(負エネルギーの白丸)の対が発生する

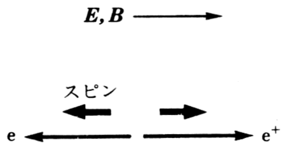


図 4.2　電磁場中の電子・陽電子対発生

子と陽電子が対発生する．発生した電子と陽電子は電場の影響で互いに左右に離れていくが，このような対 ($\psi_L \psi_R^\dagger$) は必然的にカイラリティ (-2) をもつのである．

電磁相互作用が引き起こす対発生ではカイラリティが生じないはずであるのに，なぜ今の場合カイラリティが生じるのか，疑問であろう．そのからくりは（無限に深い）ディラックの海にある．本来，海の表面 ($\omega=0$) でカイラリティが生成すると，海の底には逆のカイラリティが発生し海全体としては中性が保たれるのであるが，その底が無限に深い ($\omega \to -\infty$) ために，その影響が見えなくなってしまうのである．底の影響を切り捨てることが，一種の正則化の手続きとなっているのである．

4次元のカイラル異常項も同じ論法で理解できる．一様な電場と磁場を同じ方向にかけると，まず電子と陽電子の対が発生する（図4.2）．電子のスピンは負の磁気モーメントを生じるので，電子のスピンは磁場とは逆の方向に向こうとする．電子が電場と逆の方向に移動することと考え合わせると，今の場合右巻き（正ヘリシティ）の電子 e_R が生成することになる．対をなす陽電子は電子とは逆向きのスピンをもつ（角運動量の保存）ので，そのヘリシティも正，つまり左巻きの陽電子 $(e^+)_L$ である．やはりカイラリティ ($+2$) が生成する．

電子は磁場に巻き付くようにサイクロトロン運動をする．量子力学によると，基底状態の運動の半径は $r=1/\sqrt{eB}$ であり，サイクロトロン運動の面密度は $1/(2\pi r^2)$ となる．この面密度に電場によるカイラリティの生成率（式 (4.15)） eE/π をかけると，異常項密度 $(e^2/2\pi^2)EB$ が得られ，これは式 (3.10) に一致する．

5章　カレント代数の量子異常

ネーター・カレントは保存量を表すほかに，場の対称性の変換を生成するという重要な役割をもっている．実際，N 個のフェルミ粒子からなる系（§2・3参照）の場合には，正準交換関係*

$$\{\psi^a_\alpha(x), \psi^{b\dagger}_\beta(y)\} = \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(x-y) \tag{5.1}$$

を用いて，$U(N)_V$ カレント $j^a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi$ と場の交換関係

$$[j^a_0(x), \psi(y)] = -T^a\psi(y)\delta^3(x-y) \tag{5.2}$$

$$[j^a_0(x), j^b_\mu(y)] = i f^{abc} j^c_\mu(y)\delta^3(x-y) \tag{5.3}$$

が導かれる．j^a_0 は場の $U(N)$ 変換を生成し，自分自身では $U(N)$ 代数（$[T^a, T^b] = i f^{abc}T^c$; f^{abc} は群の構造定数）を形成することがわかる．

ネーター・カレント一般について同様の関係式が成り立つ．カレント代数は正準交換関係から直接導かれるので，相互作用の有無やカレントの保存・非保存にはよらないように思われる．素粒子がカレントを通して相互作用することを思い起こせば，このようなカレント代数の有用性は明らかであろう．60年代にはカレント代数に基づくハドロン力学の研究が盛んに行われ，大きな成果を得た．同時に“正準”的なカレント代数が部分的に修正を受けることも明らかになった．正準的なカレント代数は（ポワソン括弧を用いる）古典論の結果にすぎないことに注意しよう．カレント代数の非正準的修正項は量子効果であり，カイラル異常項とは密接なかかわりをもつ[14,20]．以下では要点を明らかにするため１＋１次元の理論を考察する．

＊　この章では，特に断らない限り交換関係は同時刻交換関係を意味する．

5・1　後藤–今村–シュウィンガー項

まず自由電子の電流の代数を計算してみよう．電流の行列要素には，3章の散乱行列の場合と同様に真空期待値を除きあいまいさはない．真空期待値を正しく取り扱うために，$\bar{\psi}$ と ψ を空間的に ϵ^1 だけ分離した電流 $j^\mu(x;\epsilon)$ を考えよう．以下では同時刻交換関係を考察するので，このように $(\epsilon^0=0)$ 正則化する．正準交換関係を用いて正則な電流の代数を計算すると

$$[j_0(x\,;0),\,j_\mu(y\,;\epsilon)]=j_\mu(y\,;\epsilon)\{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\epsilon/2)-\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\epsilon/2)\} \quad (5.4)$$

となる．空間座標を太字で表わした．素朴に $\epsilon\to0$ とすると右辺はゼロになり“正準的”な代数が得られるが，注意深く右辺を調べると，真空期待値の場合ゼロでない値をとることがわかる．2次元では電流の期待値は $<0|\,j_\mu(y;\epsilon)|\,0>=-(i/\pi)\epsilon_\mu/\epsilon^2+\cdots$ となるので，次の交換関係

$$\begin{aligned}&[j_0(x),\,j_0(y)]=[j_1(x),\,j_1(y)]=0,\\&[j_0(x),\,j_1(y)]=[j_1(x),\,j_0(y)]=(i/\pi)\delta'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{aligned} \quad (5.5)$$

が得られる（$[j_1,j_1]$ は同様な計算から求めた）．修正項は $[j_0,j_1]$ に現れ，後藤-今村-シュウィンガー (GIS) 項[8]と呼ばれる．

修正項が電子場の量子的ゆらぎに起因することは上の導出から明らかであるが，その物理的意味を考えてみよう．まず，電荷密度が電子場の静的 (時間によらない) 局所ゲージ変換を生成するこに注目しよう．実際，$Q_\theta=\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}\theta(\boldsymbol{x})j_0(x)$ とすると $[Q_\theta,\,\psi(x)]=-\theta(\boldsymbol{x})\psi(x)$ となる．GIS項の出現は，電流の空間成分が静的なゲージ変換 $\psi\to\mathrm{e}^{i\theta(x)}\psi$ のもとで

$$j_1(x)\to j_1(x)-(1/\pi)\partial_1\theta(\boldsymbol{x}) \quad (5.6)$$

と変換することを意味する．これは正則化された電流の変換性 $\delta j^\mu(x;\epsilon)$ からも直接検証できる．$\bar{\psi}$ と ψ の空間的なずれに起因する位相差が場の量子的ゆらぎと拮抗して有限の変化分 $\partial_1\theta$ を生ずるのである．この意味で，GIS項または電流の変換性 (5.6) は電流の真に量子論的な性質を表すものと考えられる．一般に量子場の積からなる複合演算子は局所的な変換に対し古典論とは異なる変換性を示す．異常項もGIS項もともに対称性の局所化に伴って現れ，大域的な

対称性には影響しないことに注意しよう．

同様にして，軸性カレントの代数は j_5^0 が生成する静的局所軸性変換 $\psi \to e^{i\theta(\boldsymbol{x})\gamma_5}\psi$ と関連をもつ．面白いことに，2次元では恒等式 $\gamma^\mu\gamma_5=\epsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$ が成り立つので，(正則化した)カレントは双対関数 $j_5^\mu(x;\epsilon)=\epsilon^{\mu\nu}j_\nu(x;\epsilon)$ を満たす．そこで，式 (5.5) で $j_1=-(j_5)_0, j_0=-(j_5)_1$ と置き換えると軸性カレントの代数が得られる．さらに静的局所軸性変換のもとで，カレントが $\delta j_1^5=-\delta j_0=(1/\pi)\partial_1\theta$ と変換することもわかる．2次元では，電流の代数は全体としてカイラル・カレント代数と同じ内容をもっているのである．

5・2　ゲージ異常項との関係

量子電磁力学では電流と軸性カレントをゲージ不変に正則化する必要があった．電流も軸性カレントと同じ因子 $\Gamma[A, \epsilon]$ を用いて正則化することができる．ただし前節と同じ理由で，以下では場はすべて同時刻 ($\epsilon^0=0$) であるとしよう．正則化因子を通して電流も軸性カレントもゲージ場によるので，ゲージ場に共役な電場 E とは交換しなくなり，“かもめ” (seagull) 項が現れる*．量子電磁力学の電流も自由場の電流も素朴な表式は同じであっても，正則化によりその量子論的内容に違いが生じることに注意しよう．前者で $e\to 0$ としたものが自由場の電流である．

正則化した軸性カレントは明らかにゲージ場と同時刻で交換する：

$$[j_5^\mu(x;\epsilon), A_\nu(y)]=0 \tag{5.7}$$

そこで，上式に $\partial/\partial x^\mu$ を演算すると

$$[j_5^0(x;\epsilon), \partial_0 A_\nu(y)]=-[\partial_\mu j_5^\mu(x;\epsilon), A_\nu(y)] \tag{5.8}$$

が導かれる．右辺に保存則 (4.13) を代入するとカイラル異常項の寄与が残り，

$$[j_5^0(x), E(y)]=(ie/\pi)\delta(x-y) \tag{5.9}$$

が得られる．これがかもめ項である．ここでゲージ場と電子場の静的なゲージ変換が演算子 $\partial_1 E+ej_0$ によって生成できることに注目しよう．すると，軸性カ

* ゲージ場は $[\psi, A_\mu]=[A_\mu, A_\nu]=0$ となるように量子化する．A_1 は電場 $E=\partial_0 A_1-\partial_1 A_0$ に正準共役 $[A_1(x), E(0)]=i\delta(x)$ である．

レントのゲージ不変性から次式が成り立つ：

$$[j_5^\mu(x;\epsilon), \partial_1 E + e j_0] = 0 \tag{5.10}$$

つまり，かもめ項から $[j_5^0, j_0]$ 交換関係が決まる．さらに双対関係を考慮すれば $[j_1, j_0]$ 交換関係が得られ，これは式 (5.3) に正しく一致する．同様に $[j_\mu, A_\nu]=0$ と $\partial_\mu j^\mu=0$ からは $[j_0, j_0]=0$ が導かれる．このように2次元量子電気力学の電流代数は電流保存とカイラル異常項から完全に決まってしまう．この代数は自由場の電流代数にも等しい．4次元の量子電磁力学ではこれほど完全にはいかず，異常項からカイラル代数の一部が決まるにとどまる[14,20]．

5•3　2次元のカレント代数

少しわき道にそれるが，ここで2次元のカレント代数の特殊性に触れておこう．電子の質量をゼロとするとカイラル対称性が出現する．$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu j_5^\mu = 0$ と $j_5^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$ を組み合わせると，カイラル・カレント $j_\pm \equiv \frac{1}{2}(j_0 \pm j_1)$ がそれぞれ $x^\pm = x^0 \pm x^1$ のみの関数であることが示せる．このとき，同時刻交換関係 (5.5) は任意の時刻で成り立つ代数

$$[j_\pm(x^\pm), j_\pm(y^\pm)] = (i/2\pi)\delta'(x^\pm - y^\pm) \quad \text{(複号同順)} \tag{5.11}$$

に拡大する (j_+ と j_- は交換する)．これがカッツ-ムーディ (Kač-Moody) 代数と呼ばれる無限次元 (任意の時刻で成り立つから) カイラル代数である[21]．この代数が現れる理由は，2次元の質量ゼロのフェルミオンが実は非常に大きい対称性をもっているからである．実際，自由場のラグランジアンはカイラル変換の位相を $\theta_L \to \theta_L(x^+)$, $\theta_R \to \theta_R(x^-)$ と $x^\pm$ の任意関数に置き換えた局所カイラル変換に対して不変である．これに対応して無限個のネーター・カレントが現れる．GIS 項の影響で，電流は

$$j_\mu \to j_\mu + (1/2\pi)\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu(\theta_R - \theta_L) \tag{5.12}$$

と変換する．

6章　非可換カイラル量子異常

標準模型のような軸性カレントを含む非可換ゲージ理論にも量子異常が現れる．その構造には非可換群の構造を反映した代数的制約が生じるが，この制約は異常項を特徴づけるとともに，その構造をほとんど決めてしまう．この章では非可換カイラル異常のこのような特性とその応用を解説する．

6・1　ヴェス-ズミノ整合条件

具体例として，質量のない N 成分フェルミ場と $SU(N)$ ゲージ場の系を考える．ただし式 (2.18) の場合とは異なり，ゲージ場は右手カレント $j_\mu^a = \bar{\psi} T^a \gamma_\mu \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ に結びつくものとしよう．

式 (2.16) のゲージ変換を $A_\mu \to A_\mu^U$ と表記して，これを $SU(N)$ の元 U による A_μ のゲージ変換が A_μ^U であると読もう．ゲージ変換 U_1 と U_2 を続けて行うと，その結果は変換 U_1U_2 を一度に行った場合に等しい．つまり $(A_\mu^{U_1})^{U_2} = A_\mu^{U_1U_2}$ が成り立つ．物質場の変換 $\psi^U = U^{-1}\psi$ についても同様である．ゲージ変換が群をなすのである．微小変換 $U = 1 - i\delta\theta^a T^a$ に対するゲージ場の応答を成分で表すと

$$\delta A_\mu^a(x) = (1/g)\nabla_\mu^{ab}[A(x)]\delta\theta^b(x) \tag{6.1}$$

となる．$\nabla_\mu^{ab}[A] = \delta^{ab}\partial_\mu + gf^{abc}A_\mu^c$ は随伴表現に対する共変微分である．

3 章と同様に，物質場の量子的ゆらぎを特徴づける量としては，真空期待値

$$W[A] = \langle 0 |\, T\exp\left[i\int d^4x j_\mu^a(x) A^{\mu a}(x)\right] | 0 \rangle \tag{6.2}$$

を考えれば十分である．ゲージ場は外場として扱う．便宜上，$gA_\mu \to A_\mu$ として

結合定数を A_μ に吸収した．適当な方法により，$W[A]$ を（ゲージ不変にはできなくても）相対論的に不変に正則化したものとしよう．

量子論のゲージ・カレントは $W[A]$ の汎関数微分により定義される：

$$\delta W[A]/\delta A^a_\mu(x)=i\langle 0\,|\,TJ^{\mu a}(x)S[A]\,|\,0\rangle \tag{6.3}$$

J^a_μ は j^a_μ といくらか異なるが，上式で定義される J^a_μ がゲージ場の運動方程式に現れる量子論のカレントである．ゲージ・カレントの共変的保存則を

$$\nabla^{ab}_\mu[A]J^{\mu b}(x)=G^a[A(x)] \tag{6.4}$$

と書こう．$G^a[A]$ が量子異常項を表す．

通常，$W[A]=\exp(i\,Z[A])$ と書いて，$Z[A]$ をゲージ場の実効作用と呼ぶ．ゲージ変換に対する $Z[A]$ の応答を

$$Z[A^U]-Z[A]=-\Gamma[A,U] \tag{6.5}$$

と表そう．変化分 $\Gamma[A,U]$ をヴェス-ズミノ（Wess-Zumino, WZ）作用と呼ぶ．容易にわかるように，微小変換に対する応答は異常項を表す：

$$-\delta Z[A]=\Gamma[A,1-i\delta\theta]=\int d^4x\delta\theta^a(x)G^a[A(x)]. \tag{6.6}$$

つまり実効作用のなかでゲージ不変性を破る部分が量子異常項である．

ゲージ変換が群をなすことから量子異常の構造に制約が生じる．差 $Z[A^{U_1U_2}]-Z[A]$ の間に $-Z[A^{U_1}]+Z[A^{U_1}]=0$ を挿入すればわかるように，任意の U_1, U_2 に対し関係式

$$\Gamma[A,U_1U_2]=\Gamma[A^{U_1},U_2]+\Gamma[A,U_1] \tag{6.7}$$

が成り立たなくてはならない．この関係式をヴェス-ズミノ整合条件（WZ consistency condition）という[22]．

ゲージ変換の示す自然な結合則を異常項について言い直したものが WZ 条件である．異常項がこの結合則を満たすときには，異常項を積分して WZ 作用を構成できる．この意味で，WZ 条件は積分可能性条件でもある．場の量子論のいろいろな代数演算が矛盾なく行える背景には自明な結合則がある．ゲージ場の量子論が代数的に矛盾しないように，群の自然な結合則はいつでも正常に保たれるようにしなければならない．

整合条件を異常項 $G^a[A]$ について書き直してみよう． $W[A]$ のようなゲージ場 A_μ の汎関数については，その（微小）ゲージ変換が微分演算子

$$\delta = \int d^4x\ \delta\theta^a(x) X^a(x), \qquad X^a(x) = -\nabla_\mu^{ab}[A]\delta/\delta A^{\mu b}(x) \tag{6.8}$$

によって生成できることに着目する．実際，上式を A_μ に演算すると式 (6.1) が得られる．このゲージ変換の演算子は $SU(N)$ 代数を形成する：

$$[X^a(x), X^b(y)] = f^{abc}\delta^4(x-y)X^c(y). \tag{6.9}$$

BRS (Becchi-Rouet-Stora) 変換[23]を使うと，ゲージ変換の代数構造を簡潔に表すことができる．ゲージ場の BRS 変換は式 (6.1) で $\delta\theta^a(x)$ を FP ゴースト場 (Faddeev-Popov ghost) $\lambda^a(x)$ に置き換えたもので与えられる． λ^a は反可換の場であり，その BRS 変換は $\delta_B\lambda^a = -(1/2)f^{abc}\lambda^b\lambda^c$ と定義される．式 (6.8) で $\delta\theta^a \to \lambda^a$ と置き換えたものにゴースト場の BRS 変換の演算子を付け加えると，完全な BRS 変換の演算子 δ_B が構成できる．BRS 変換の特徴は，それを 2 度くり返すとゼロになるという性質である：

$$(\delta_B)^2 \equiv \delta_B\delta_B = 0. \tag{6.10}$$

ゲージ変換の結合則 (6.9) がこの式に要約されたのである．

ゲージ異常項 $G^a[A(x)] = -X^a(x)Z[A]$ は実効作用 $Z[A]$ を BRS 変換した形に書けるので，異常項は次式を満たす：

$$\delta_B \int d^4x\ \lambda^a(x) G^a[A(x)] = -(\delta_B)^2 Z[A] = 0 \tag{6.11}$$

これが求める WZ 条件であり， $G[A]$ に対する汎関数微分方程式となる．

ファインマン図からもわかるように実効作用 $Z[A]$ はゲージ場の非局所汎関数であり，決して $Z[A] = \int d^4x \hat{Z}[A(x)]$ という局所的な形には表せない．ところが $Z[A]$ で紫外発散を含む部分は（量子場のループが一点に収縮する極限であるので）必ず局所汎関数の形をしている．しかもその形は正則化のしかたによって変化する．そこで $Z[A]$ にはもともとゲージ場の適当な局所汎関数 $K[A;$ 局所$]$ を付け加える任意性があると考えてよい．仮に $Z[A] + K[A;$ 局所$]$

を新しい実効作用と見なすと，異常項は $G^a[A]-X^aK[A;\text{局所}]$ と形を変える．局所汎関数をゲージ変換した形 (X^aK または $\delta_B K$) に書ける異常項は式 (6.11) を自動的に満たすので，自明な解と呼ぼう．カレントの定義（正則化）を適当に調節すると自明な異常項は除去できるので，$Z[A]$ の非局所性に由来する非自明な異常項こそが真の異常である*．WZ 条件により（非自明な）異常項は自明な部分を同一視した同値類に類別されることになる**．

式 (6.10) は微分幾何学に現れる外微分演算 $d=\mathrm{d}x^\mu\partial_\mu$ の性質 $d^2=0$ とよく似ている．実は BRS 変換も一種の外微分演算と見なすことができる[24,25]．時空座標のほかにもうひとつ座標 s を導入した大きい空間でゲージ変換を考える．変換行列 $U(x,s)$ による $A_\mu(x)$ のゲージ変換を $A_\mu(x,s)$ と記そう．すると外微分 $\delta=\mathrm{d}s\partial/\partial s$ が $A_\mu(x,s)$ の BRS 変換を生成することが示せる．そして FP ゴースト $\lambda^a(x,s)$ は 1-形式 $U^{-1}\delta U$ と対応づけられる．

このように非自明な非可換異常項を見つける問題は，外微分による同値類の類別（この類別はコホモロジーと呼ばれる）の問題に帰着される．この問題はズミノ (Zumino) とストラ (Stora) によって解かれ[24]，（任意の次元の時空における）異常項と重力カイラル異常項を代数的な手続きで系統的に構成する方法が開発された．また非可換異常項が 2 次元高い理論の可換異常項から導かれることや，その位相的な背景も明らかになった[26]．美しい数学の体系をもつ話であるが，本稿ではその説明に立ち入る余裕はない．

6·2　異常項とその打ち消し条件

ここでは直接の計算によってゲージ異常項を求めることにする．藤川の方法を使おう．式 (4.10) に倣ってヤコビアン因子を正則化する．答は

$$G^a[A]=\frac{1}{24\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\mathrm{tr}\left[T^a\partial_\mu\!\left(A_\nu\partial_\rho A_\lambda-i\,\frac{1}{2}\,A_\nu A_\rho A_\lambda\right)\right] \qquad (6.12)$$

---

*　$U(1)$ 異常項 $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\rho\lambda}$ もゲージ場の局所汎関数をゲージ変換した形には決して書けない．これはカイラル電磁力学に現れる異常項でもある．

**　カイラル量子異常に限らずこの定義はすべての量子異常に当てはまる．時空対称性についても式 (6.11) の形の整合条件を書き下すことができる．

となる[27)]．$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ を含まない項も現れるが，それらは(無害な)自明な解の形に書けるので除去した．

上記の結果は容易にカイラル・ゲージ理論に拡張できる．カイラル・カレントに結びつくゲージ場を $A_{\rm R}^{\mu}, A_{\rm L}^{\mu}$ と区別すると，右手と左手のカレントの量子異常は上式で $G^a[A]$ をそれぞれ $G^a[A_{\rm R}]$ と $-G^a[A_{\rm L}]$ に置き換えた左右対称な形に書けることが計算により示される．したがって左右の $SU(N)$ 対称性が量子異常をもつことになるが，本当の異常は軸性 $SU(N)$ 対称性の部分に存在する．詳細は略すが，実は $SU(N)_V$ 異常項 $G^a[A_{\rm R}]-G^a[A_{\rm L}]$ は自明な解 (局所汎関数のゲージ変換) となることが証明できるのである．

この結論は，ベクトル場 $V^{\mu}=\frac{1}{2}(A_{\rm R}^{\mu}+A_{\rm L}^{\mu})$ と軸性ベクトル場 $A^{\mu}=\frac{1}{2}(A_{\rm R}^{\mu}-A_{\rm L}^{\mu})$ を組んで，理論を $SU(N)_V\times SU(N)_A$ ゲージ理論とみてもわかる．PV 正則法を用いれば，$SU(N)_V$ ゲージ対称性は厳密に保つことができるからである． $SU(N)$ カレントを $j^{\mu a}=\bar{\psi}T^a\gamma^{\mu}\psi,\ j_5^{\mu a}=\bar{\psi}T^a\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ と表そう．$SU(N)_V$ 対称性の明白な軸性異常 ($=G^a[A_{\rm R}]+G^a[A_{\rm L}]+$自明な解) は次の形をとる[27)]：

$$\nabla_{\mu}^{ab}[V]j_5^{\mu b}+f^{acb}A_{\mu}^{c}\,j^{\mu b}=G_5^a \tag{6.13}$$

$$G_5^a=\frac{1}{4\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,{\rm tr}\Big[\,T^a\Big\{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}+\frac{1}{12}H_{\mu\nu}H_{\rho\lambda} + i\frac{2}{3}(A_{\mu}A_{\nu}F_{\rho\lambda}+A_{\mu}F_{\nu\rho}A_{\lambda}+F_{\mu\nu}A_{\rho}A_{\lambda})-\frac{8}{3}A_{\mu}A_{\nu}A_{\rho}A_{\lambda}\Big\}\Big] \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}&=\partial_{\mu}V_{\nu}-\partial_{\nu}V_{\mu}-i[V_{\mu},V_{\nu}]-i[A_{\mu},A_{\nu}],\\ H_{\mu\nu}&=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}-i[V_{\mu},A_{\nu}]-i[A_{\mu},V_{\nu}]. \end{aligned} \tag{6.15}$$

上式で $T^a\to 1$ とすれば可換異常項 (3.10) に一致する．式 (6.12) の A^2 項と式 (6.14) の V^2 項は可換異常項とよく似た構造をしているが，これらの項を初項として WZ 条件に代入すると，逐次近似により完全形を導くことができる．WZ 条件が異常項の構造を特定する威力がわかる．

§3・2 で述べたように，ゲージ・カレントの保存則には量子異常が現れてはならない．異常項が消えるためには，その初項がゼロとなればよい．その条件は群の対称係数 ${\rm tr}(T^a\{T^b, T^c\})\propto d^{abc}=0$ である．もっと複雑な群の場合には

表 6.1　第1世代のレプトンとクォーク（I は弱アイソスピン，Y は弱超荷を表す）

	レプトン		クォーク		
	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	e_R	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R
I	1/2	0	1/2	0	0
Y	-1	-2	1/3	4/3	-2/3

“三角”図から異常項の初項の構造を読み取ればよい．

$SU(2)_W \times U(1)_Y$ 対称性に基づく標準模型では，ゲージ場がカイラル・カレントに結びつくので，量子異常項の有無を正しく知る必要がある．レプトンとクォークの第1世代の弱アイソスピン (I_a) と弱超荷 (Y) を表6.1に示した．これらを用いて，粒子の電荷は $Q=I_3+Y/2$ と書かれる．ゲージ・カレントには純粋な $SU(2)$ 異常項は現れない ($d^{abc}=0$) が，$SU(2)_W$ と $U(1)_Y$ の混合した異常項と $U(1)_Y$ 異常項が生じる．量子異常は軸性部に現れるので，左手フェルミオンのループと右手フェルミオンループの寄与の差を考えればよい．

混合異常項で明らかにゼロでとならないものは，$\mathrm{tr}(Y\{I_a, I_b\})_L - \mathrm{tr}(Y\{I_a, I_b\})_R \propto \delta_{ab}\,\mathrm{tr}(Y)_L$ である．$\mathrm{tr}(Y)_L$ はレプトンについては-2，クォークについては色の自由度(3)を考慮して (2/3) × 3 = 2 となるので，両者の寄与は打ち消し合う．$U(1)_Y$ 異常項は $\mathrm{tr}(Y^3)_L - \mathrm{tr}(Y^3)_R$ に比例するが，やはりレプトンの寄与(= 6)とクォークの寄与が打ち消し合う．したがって，標準模型ではクォークとレプトンの世代の数が同じであると量子異常による自己矛盾を避けることができる[28]．このクォーク・レプトン対応は，未発見の6番目の香り（トップ）をもつクォークの存在を強く示唆する．このように素粒子の模型は自由に構成できるわけではない．量子異常を考慮するとその内容に制約が生じるのである．

6・3　カイラル異常項の実験による検証

WZ 条件 (6.7) で $U_1 \to U$, $U_1U_2=h$ と置き直してみよう：

$$\Gamma[A^U, U^{-1}h] - \Gamma[A, h] = -\Gamma[A, U]. \tag{6.16}$$

ここで $h(x)$ を $h^U=U^{-1}h$ とゲージ変換する独立な物質場と見なすと，WZ 作

用 $\Gamma[A, h] \equiv S_{\rm eff}[A, h]$ は式 (6.5) を満たす．つまり基礎理論の異常項を再現する実効理論が構成できる (特解 $S_{\rm eff}$ にゲージ不変な作用を付け加えると，完全な実効作用となる)． $\Gamma[A, h]$ は (式 (6.6) に見るように) A_μ と h の局所汎関数である．ゲージ場のみの局所的な作用では決して(非自明な)異常項を再現することはできないが，ここではボース場 $h(x)$ を導入したので局所的な作用が作れたのである．この $S_{\rm eff}$ は異常項に関係した物質場の低エネルギー反応を記述する[22,29]．

具体例を考えよう．u, d, s クォークの質量を無視すると，QCD は香りに関する $SU(3)$ カイラル対称性を示す．QCD の非摂動的効果により軸性 $SU(3)$ 対称性は自発的に破れ，これに伴って南部-ゴールドストーン (NG) 粒子が現れる．π, K, η 中間子が NG 粒子である．現実にはクォークの質量の影響で，これら擬スカラー中間子は質量をもつ．標準模型の電弱ゲージ粒子である光子，$\mathrm{W}^\pm$, Z^0 は香り荷に結びつく．ゲージ・カレントが保存することは前節で確かめたが，ゲージ・カレントではない香り荷の $SU(3)$ 軸性カレントには量子異常が生じてもよい．そして，NG ボソンが量子異常を通して電弱ゲージ場に結びつく様子は WZ 作用で記述できる．なかでも中性中間子 π^0 と η の電磁崩壊が重要である．そのほかの NG ボソンは弱崩壊をする．

実際に軸性異常項 (6.14) に基づく実効作用を構成するには，次のようにする．ゲージ変換 $A_{\rm R} \to A_{\rm R}^U$, $A_{\rm R} \to A_{\rm R}^W$ に応答する WZ 作用を $\Gamma[A_{\rm R}, A_{\rm L}; U, W]$ と記そう．式 (6.7) と同様に WZ 条件を書き下すと，実効作用を $S_{\rm eff}[V, A; h] \equiv \Gamma[A_{\rm R}, A_{\rm L}; h, h^{-1}]$ と選べばよいことがわかる．ただし，軸性変換 $A_{\rm R} \to A_{\rm R}^U$, $A_{\rm L} \to A_{\rm L}^{U^{-1}}$ のもとで，物質場は $h \to h^U = U^{-1} h U^{-1}$ と変換するものとした．次に $h(x) = \exp[-i\phi(x)]$ と表し，これと単位変換を滑らかに結ぶ変換行列 $h[\tau] = \exp[-i\tau\phi(x)]$ $(0 \le \tau \le 1)$ を導入する．そして式 (6.5) を微小軸性ゲージ変換に分割して足し上げれば

$$S_{\rm eff}[V, A; h] = \int \mathrm{d}^4 x \int_0^1 \mathrm{d}\tau \phi^a(x) G_5^a[A_{\rm R}^{h[\tau]}, A_{\rm L}^{h[\tau]^{-1}}] \qquad (6.17)$$

が得られる．

荷電 π 中間子のミュー中間子への崩壊から，クォークの軸性カレントと π 中間子の結合定数（崩壊定数）$f_\pi \approx 93$ MeV が決められる．NG ボソンの場 $\pi^a(x)$ を用いて $\phi^a = \pi^a/f_\pi$ と置くと，NG ボソンの非線形表現が得られる．π^0 が $SU(3)$ 8 重項の第 3 成分，η が第 8 成分に当たることに注意して，式 (6.17) で $\phi \to (\pi^0(x)T^3 + \eta(x)T^8)/f_\pi$, $A_R^\mu = A_L^\mu \to eA^\mu(x)\{T^3 + (1/\sqrt{3})T^8\}$ と置けば*，$\pi^0 \to \gamma\gamma$ と $\eta \to \gamma\gamma$ 過程を表す実効相互作用

$$c(e^2/16\pi^2 f_\pi)\{\pi^0 + (\eta/\sqrt{3})\}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda} \tag{6.18}$$

が導かれる．$N=3$ をクォークの色の数として，係数は $c=N/6$ となる．

歴史的には，上記の結果はカイラル異常項に関する低エネルギー定理として導かれた[6)]．π^0 はクォークで書くと $(\mathrm{u\bar{u}} - \mathrm{d\bar{d}})$ の内容をもち，クォークの 8 重項軸性カレントの第 3 成分に結びつく．電磁相互作用のもとで，このカレントに量子異常が生じる**（式 (6.13) 参照）：

$$\partial_\mu j_5^{\mu 3} = f_\pi m_\pi^2 \pi^0 + c(e^2/16\pi^2)\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}. \tag{6.19}$$

係数 $c=N/6$ は u, d クォークの電荷と色の数から決まる．$m_\pi \approx 135$MeV は π^0 の質量である．$\pi^0 \to \gamma\gamma$ 振幅を求めるには，上式を真空と 2 光子の状態ではさめばよい．軸性カレントの行列要素は，π^0 の 4 元運動量の 2 乗 $k^2 \to 0$（ソフトパイ）の極限でゼロとなることが示せる．その結果，ソフトパイ極限では異常項を通して π^0 の崩壊が進行することになり，その振幅は実効相互作用 (6.18) から得られるものに合致する***．

崩壊率を計算すると

$$\Gamma = (e^2/4\pi^2)^2 (N/24)^2 m_\pi^3/(\pi f_\pi^2) \approx 7.6\ \mathrm{eV} \tag{6.20}$$

となり，($N=3$ のとき) 実験値 7.7±0.6 eV とよく一致する．この π^0 の電磁崩

---

* T^3, T^8 は対角行列であり，その対角成分はそれぞれ $(1/2)(1, -1, 0)$ と $(1/\sqrt{12})(1, 1, -2)$ である．

** この $SU(3)_A$ 量子異常は，$SU(2)_A$ と $U(1)_V$ の混合量子異常とみてもよい．右辺の第一項は本来クォーク場の擬スカラー密度であるが，π^0 の質量殻近傍では π^0 の場で近似できる．

*** π^0 の質量殻上でも，軸性カレントの寄与は異常項に比べて $m_\pi^2/(2M)^2 \sim 1/20$ 倍小さい（$M \approx$ 300MeV はクォークの質量）．

壊率は，クォークが3種の色をもつことを示す証拠の1つである．

ここで式 (6.18) の $\pi^0\gamma\gamma$ 結合がカイラル対称な結合でないことに注意されたい (仮に WZ 作用 $\Gamma[A,h]$ がカイラル不変であれば，変換則 (6.16) と矛盾する)．これが素朴なソフトパイ極限でπ^0が崩壊しない理由でもある．カイラル量子異常により，カイラル対称性を破る物質場とゲージ場の結合が誘起される事実が重要である．

同様にして $m_\eta \approx 550\mathrm{MeV}$ を用いて η の電磁崩壊率を計算すると，$\Gamma(\eta \to \gamma\gamma) = (1/3)(m_\eta/m_\pi)^3\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) \approx 170\ \mathrm{eV}$ となる．実測値の平均は $(460\pm 50)\ \mathrm{eV}$ であるが，η が π^0 に比べかなり重いことや，η と η' の混合の効果を無視したことを考え合わせると，この計算値は十分に納得のいく値である．

正確にいうと，η 中間子には η (550MeV) と η' (960MeV) の2種類があり，それぞれ $SU(3)$ 8重項の第8成分 η_8 と1重項 η_0 が混合したものである．しかし，クォークの質量の効果と混合の効果を取り入れた素朴なカレント代数の議論だけでは，エータ中間子の質量スペクトルと $\eta \to \pi\pi\pi$ 崩壊率などが説明できない．これを $U(1)$ 問題という．この話題については明快な解説があるので[13)]，ここでは概略のみを述べよう．グルーオンは香り荷をもたないので，香り荷をもつクォークの8重項軸性カレントには結びつかない．一方，1重項クォーク軸性カレントは香りをもたないので，その保存則にはグルーオンに由来するカイラル異常項が現れる．電弱ゲージ場とは対照的にグルーオンの相互作用は強いので，この異常項の出現は1重項軸性カレントとそれに結びつく η_0 の性格を大きく変えてしまう．η_0 には η_8 に比べグルーオンの力学が強く反映するのである．その結果，η_0 が重くなり $\eta \to 3\pi$ の結合も強くなる．QCD のカイラル異常項は $U(1)$ 問題解決の鍵となるのである．

6・4　量子異常をもつゲージ理論

ゲージカレントの保存則に異常が生じるとゲージ理論は自己矛盾するが，仮に運動方程式を解いた結果，量子異常項がゼロになれば自己矛盾は避けられる．自明な異常項の自由度をうまく用いると，この例外的な状況が出現するこ

とが，厳密に解ける2次元のゲージ理論で示された[30]．これは新しい可能性である．WZ作用を用いると，これが自然に実現できる．

作用 $S[A]$ で記述されるゲージ理論が異常項をもつとしよう．h を独立な場と見なし，$S[A]-\Gamma[A,h]$ を作用とする新しいゲージ理論を考えると，その理論では式 (6.5) と (6.16) からわかるように量子異常が打ち消し合う．この拡大した理論はもとの理論と形式的には等価である．なぜなら，ゲージ条件 $h=1$ を設定すればもとの理論に戻るからである．これから，異常項をもつゲージ理論を自由度の拡大した正常なゲージ理論として矛盾なく構成する可能性が生まれる[31]．この考え方に沿って，2次元のゲージ理論や弦理論[32]では理論の枠組みが実際に広がった．弦理論では今後の発展も期待できる．ただ4次元のゲージ理論については，くりこみ可能性が失われるので今のところ目立った発展はない．

7章　電荷密度波

この章では物性物理におけるカイラル異常項の話題を紹介する．１つの方向にのみ高い電気伝導度を示す導体を１次元導体という．低次元導体に特有な電流の担い手として，格子ひずみを伴う電子の集団励起が知られており，電荷密度波 (charge-density wave, CDW) と呼ばれる[33]．CDW による電気伝導はカイラル量子異常と関係が深い[34]．

7･1　１次元電子・格子系

まず１次元の電子系の概観から始めよう．長波長の現象に関心があるので，原子が作る１次元格子をならして，原子は一様に分布しているものとする．電子はフェルミ統計に従うので，一電子のエネルギー準位は基底準位から順々につまっていき，電子数で決まるその上限がフェルミ準位となる．電気伝導にはフェルミ準位近傍の電子が関与する．空間が１次元であるため，伝導電子はフェルミ速度 $v_F = p_F/m$ でそれぞれ右と左に進む電子であるということができる．そこで伝導電子のラグラジアンとして

$$i\,\psi_R^\dagger(\partial_t + v_F\partial_x)\psi_R + i\,\psi_L^\dagger(\partial_t - v_F\partial_x)\psi_L \qquad (7.1)$$

を採用する．これらの電子は格子振動（フォノン）により散乱される．例えば，運動量 p_F をもち右に進む電子 ψ_R が運動量 $-2p_F$ をもつフォノンに散乱されると，左に進む伝導電子になる．そこで運動量 $\pm 2p_F$ のフォノンのモードを $\phi, \phi^\dagger$ と表すと，電子とフォノンの相互作用は G を結合定数として

$$G(\psi_L^\dagger\psi_R\phi^\dagger + \psi_R^\dagger\psi_L\phi) \qquad (7.2)$$

と書くことができる．フォノンの運動項は，振動数を ω_0, 分散を v_0 として，次

のように選べるであろう：

$$\phi^\dagger(-\partial_t^2+v_0^2\,\partial_x^2-\omega_0^2)\phi. \tag{7.3}$$

$\psi=(\psi_L,\psi_R)^T, x^\mu=(t,x/v_F)$ とすれば，式 (7.1) と (7.2) は見かけ上相対論的な形に書くことができる．

電子場のカイラル変換とともにフォノン場が $\phi\to e^{i(\theta_R-\theta_L)}\phi$ と変換すれば，全ラグランジアンがカイラル不変となることに注目しよう．このカイラル対称性が1次元系でどのように実現されるているかを知ることが，考察の鍵となる．通常は，低次元電子系に特有な不安定性（パイエルス不安定性）のために格子が自発的にひずみ（≈フォノン場の期待値 $<\phi>\neq0$），電子密度に濃淡が生じると考える．カイラル対称性が自発的に破れ，南部-ゴールドストーンモードとして CDW が現れると考えるのである．この描像は2次元導体の CDW については妥当と思われるが，一般にゆらぎの重要な1次元系では適当でない．1次元系ではカイラル対称性が自発的に破れないことを教える定理[35)]も知られている．

そこで，非摂動的な方法を用いて1次元系を解析してみよう．まず，電子間のフォノン交換の効果を評価して，系の長波長の構造を厳密に表す実効ラグランジアンを作る（図7.1）．導出の詳細は略して，結果を記すと

$$L_{\mathrm{eff}}=\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\frac{1}{2}(g_0\,j_0^2-g_1\,j_1^2) \tag{7.4}$$

となる．g_0 と g_1 は，$G, \omega_0, v_0/v_F$ のある関数として決まる結合定数である．j_μ は電流 $j_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ を表す．

この長波長実効理論にはもとの理論にない局所対称性が現れる．自明なことではないが，電子場の局所カイラル変換とともに電流が式 (5.12) のように変換

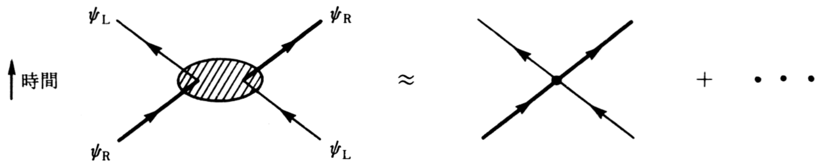


図 7.1　電子間のフォノン交換．右辺では長波長で重要となる項のみを残した

するとして，位相 θ_R, θ_L を $\hat{x}^{\pm}=x^0 \pm vx^1$ (v はある定数)の任意関数 $F_{\pm}(\hat{x}^{\pm})$ の適当な線形結合に選ぶと，ラグランジアン (7.4) は不変となる．つまり，実効理論は，§5•3 で述べたカッツ-ムーディ代数に基づく局所カイラル対称性をもっているのである．そしてこのことから系の本質が決まってしまう．

カッツ-ムーディ代数がコンフォーマル代数(質量ゼロの粒子に関係する対称性) を含むことから，ただちに系に質量ゼロの励起，つまり線形分散を示す長波長の励起が現れることがわかる．これが電荷密度波である．さらに電子相関が距離のべきで振舞うこと，カイラル対称性が厳密に成り立つことなども示される．カイラル対称性の自発的な破れは起こらず，1次元系の CDW は局所カイラル対称性に付随する長波長励起として出現するのである．

7•2　電荷密度波による電気伝導

外から電場をかけると電荷密度波全体が滑り，抵抗なしに電流を運ぶ．この様子はカイラル異常項を通して理解できる．細かい点は別として，本質は 1 + 1 次元量子電気力学の場合を考えても同じであるので，式(4.13)を用いよう：

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial_1 j_0 - \partial_0 j_1 = -(e/\pi)E \qquad (7.5)$$

空間的に一様な振動電場 $E(\omega)e^{-i\omega t}$ に対しては，上式より電気伝導度 $ej_1(\omega)/E(\omega)=i(e^2/\pi)(1/\omega)$ が導かれる．直流の伝導度が無限に大きくなることがわかる．CDW によるこの超伝導の機構を，パイエルス-フレーリッヒ機構という[36]．

空間に分布している電子を全体として少しずらすと，左右の境界に電荷がたまるが，その誘起する電場のために電子全体はもとに戻ろうとする(図7.2)．このようにして生じるプラズマ振動も異常項により理解できる．誘起される電場はマクスウェル方程式で決まるので，式(7.5)と組み合わせると

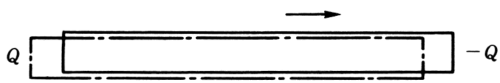


図 7.2　CDW 媒質のプラズマ振動

$$(\partial_0^2-\partial_1^2)E=-(e^2/\pi)E \tag{7.6}$$

が得られる．これからプラズマ振動数 $e/\sqrt{\pi}$ が求まる．さらに，プラズマのなかでは電荷が遮蔽されることもわかる．実効理論で同様の議論をすると，よく知られたプラズマ振動数 ω_{p} の表式が得られ，電荷の遮蔽長も(CDW の速度)/ω_{p} となる．

不純物効果や CDW どうしの相互作用を考慮すると，CDW による電気伝導の様子は上述の理想的な状況からずれてくる．その様子はカイラル対称性の(破れの)観点から考察することができる．

おわりに

量子効果により対称性が修正を受ける現象「量子異常」は場の理論に特有な現象であり，量子論の本質をのぞき見る貴重な窓となる．対称性を基盤とするゲージ理論の場合，量子異常がその存否をも決める重要な意味をもつことは今や明白であろう．簡潔にゲージ理論の量子異常のまとめをしておこう．

1) ゲージ理論では，フェルミ場の短波長の量子的ゆらぎのために，物質場の軸性カレントの保存則に修正が生じる．ベクトル対称性には異常は現れない．
2) 軸性（カイラル）異常項はゲージ場の幾何学的性質と密接に関係しており，その出現は幾何学により説明できる．
3) カレントの保存則に量子異常が現れても，関係する対称性の大域的な構造（または保存量の存在）は変化しない．しかし，その局所的な構造は変更を受けるので，物質場とゲージ場の新しい結合が生じる．この新しい局所的対称性が量子論を支配する真の対称性であり，§6・3で解説したようにハドロンの力学の解明の際に重要な役割を演じる．
4) ゲージ・カレントの保存則に異常が生じると，ゲージ理論は自己矛盾する．このような場合，物質場の内容をうまく調整して問題の異常項が消えるように理論を構成しなければならない．標準模型でクォークとレプトンの種類（世代）が同数必要となるのはこのためであった．ゲージ場が勝手な物質場を受け入れるのではなく，量子異常の様子を見て好ましい物質場を選び出すとは意外であろう．

現在到達できるエネルギーのスケール（～100 GeV）では，強い相互作用の理

論（量子色力学）と電弱統一理論（ワインバーグ-サラム模型）は実験による検証を得たよい理論である．しかし，これらは最終理論ではないであろう．歴史をみると，より基礎的な理論に進むと，より大きい対称性に出会っている．宇宙創世の様子を記述する究極の理論はさぞ高い対称性をもつことであろう．電弱強相互作用を統一する大統一理論，さらに重力をも統合する（超対称）弦理論は，この方向への発展である．上記(4)の「異常項の打ち消し」の要請は，新しい素粒子の模型を構築する際には必ず考慮に入れなくてはならい基本的な制約である．弦理論は重力を含む究極の理論の最有力候補であり，発散を含まない完全に有限な弦理論が知られている．量子異常の考察から，自己矛盾のない有限な弦理論の時空次元と対称群の構造が決められた．

保存則または対称性は力学系を特徴づける基本的な性質である．なぜこれに量子異常が生じるのか明確にしておこう．通常，ラグランジアンまたは運動方程式から力学系の対称性を読み取るが，場の量子論に特有な紫外発散はこれらの表式には陽に顔を出さない．ここに量子異常の潜む余地があり，実際，正則化をするとその姿を現す．大事な点は，量子論には古典論にない自由度が存在するという事実である．真空の概念や紫外発散がその“かくれた”自由度であるが，力学系によってはこれ以外にも現れる*．“かくれた”自由度の効果は古典論の立場からは異常と見えても，量子論としては必然の効果であり正当に評価しなくてはならない．紫外発散というと何か病的なイメージがつきまとうが，量子場の短波長のゆらぎがその成因である以上，発散には物理的な意味がある．その現れの１つが量子異常である．

量子異常の原因は真空の性質にも帰することができた．フェルミオンの真空“ディラックの海”にみるように，真空とは本来量子的なものであり，何もない状態からは程遠い．外からの刺激によっては，その構造に変化が起こり新しい量子数が誘起されるダイナミックなものである．この認識は大切である．量子異常はこのような量子数誘起現象の一環としてとらえることができた(§4·3)．

* 例えば，量子色力学には真空の多様性を特徴づけるパラメター θ が現れ，CP の破れを引き起こす．

この意味で，量子異常はベリー（Berry）の位相[37]（量子系の周期的な断熱変化に伴って現れる断熱位相）というより普遍的な観点からも理解できる．

このように見てくると，量子異常が実はありふれた現象であることに気づくであろう．また，古典論と量子論を隔てる“かくれた”自由度を正しく理解することが量子論の真の姿にせまる道であることもわかる．

本稿では時空対称性の量子異常について詳しく触れる余裕はなかった．コンフォーマル対称性は質量ゼロの粒子に関係した時空対称性であり，その主要な部分は時間と距離のスケールの変換（拡大や縮小）からなる．スケールの変換とは，物理現象を観測する際の解像度を変化することと考えてよい．例えば，裸の u クォークは重さ数 MeV の質点のように振舞うが，10^{-14}cm ぐらいのスケールではグルーオンの雲をまとい約300MeV ほどの重さになる．さらに大きいスケールでは単独のクォークは見えず，ハドロンのみが観測される．解像度に応じて物理量や現象がどのように見えるかを教えてくれるのが，スケール変換則である．複雑な力学系であっても，系の短距離や長距離の振舞いには普遍的なスケール則が現れることが多い．

場の理論は紫外発散を含むので，スケール変換に対する物理量の応答は古典論（または素朴な正準理論）から予想されるものとは一般に異なる．量子効果により，いろいろな物理量の（スケール変換に対する）次元が変化する．これをスケール量子異常という．量子色力学の特徴である漸近自由性はスケール量子異常の現れである．スケール異常には指数定理のような幾何学的な背景はない（が，コホモロジーの構造はある）．発散を含むすべての理論に出現する．量子効果を取り入れた正しいスケール変換則は CS（Callan-Symanzik）方程式[38]として知られている．これと密接な関係にあるのがくりこみ群の方程式であり，同じ用途をもつ．

スケール対称性は物性物理の臨界現象や相転移の研究においても活躍する．なかでも，近年盛んになったコンフォーマル代数とカッツ-ムーディ代数の2次元統計系の臨界現象と弦理論への応用は興味深い．2次元空間ではコンフォーマル対称性は無限次元の大きな対称性となり，無限個の保存量が現れる．そ

の結果，理論に対する代数的制限がきつくなり，多くのコンフォーマル不変な模型は，その量子異常項を指定すると厳密に解けてしまう．カッツ-ムーディ代数の場合も同様で，量子異常が局所カイラル対称性をもつ理論の本質を決めてしまうのである(7章でその一例を見た)．1＋1次元のフェルミオンをボソンで書き表す「ボソン化」はカッツ-ムーディ代数の応用例であり，2次元系の解析に非常に有効な手段である．

素粒子物理に限らず一般に，対称性の観点から物理現象を理解することは大事である．対称性の実現様式の共通性を通して諸々の現象を統合的に理解することには大きな意義がある．ゲージ理論の枠組みはこのような目的に適していることを強調しておきたい．対称性がないか，または低い対称性が実現している理論に余計な自由度を導入してゲージ対称性をもつ理論に持ち上げ，再び余分な自由度を除去する(ゲージ固定)．このときゲージ固定を適当に行うと，もともとは見かけの違う，しかし等価な理論を得ることができる．“ゲージ理論化”の手続きにより，まったく独立に見えた2つの理論を結びつけることが可能となった例は多い．§6·4では，その一例を述べた．

超伝導や超流動のような巨視的なスケールで現れる量子力学的輸送現象は系の対称性とのかかわりが深い．現在，ゲージ理論の観点から量子ホール効果，高温超伝導現象などを解明する試みが精力的になされている．大きな発展の期待される分野である．そこでは，ゲージ場のトポロジーや量子異常などゲージ理論のもつ基本的な特性とともに，ゲージ理論の枠組みのもつ融通性が駆使されている*．本解説が読者にとって対称性の概念とゲージ理論に親しむきっかけとなれば幸いである．

---

* 電子の平面的な配置を特徴とするこれらの現象では，平面に特有な（フェルミ統計でもボース統計でもない中間的な）分数粒子統計に従う励起[39]（エニオン，anyon）が主要な役割を演じると考えられている．エニオンは1＋2次元のゲージ理論で記述できる．

参考文献

1. S. Weinberg: *Phys. Rev. Letters,* **19**, 1264 (1967)
   A. Salam: Elementary Particle Theory, ed. by N. Savartholm, p.367, Almquist and Forlag (1968)
2. H. Fritzsch, M. Gell-Mann & H. Leutwyler: *Phys. Letters*, **47B**, 365 (1973)
   D. J. Gross & F. Wilczek: *Phys. Rev. Letters,* **30**, 1343 (1973)
   H. D. Politzer: *Phys. Rev. Letters,* **30**, 1346 (1973)
3. C. N. Yang & R. L. Mills: *Phys. Rev.,* **96**, 191 (1954)
   R. Utiyama: *Phys. Rev.,* **101**, 1597 (1956)
   内山龍雄はゲージ原理の一般論を築き上げ，重力理論への応用を行った。
4. G. 't Hooft: *Nucl. Phys.,* **B35,** 167 (1972)
5. Y. Nambu & G. Jona-Lasinio: *Phys. Rev.,* **122**, 345 (1962)
   J. Goldstone: *Nuovo Cimento*, **19**, 154 (1961)
6. S. L. Adler: *Phys. Rev.*, **177,** 2426 (1969)
   J. S. Bell & R. Jackiw: *Nuovo Cimento,* **60A**, 47 (1969)
7. 量子異常に関する総合報告
   S. L. Adler: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, Vol. **1**, eds. S. Deser 他, p.1, M. I. T. Press (1970)
   R. Jackiw: Lectures on Current Algebra and its Applications, p.97, Princeton Univ. Press (1972) ; Relativity, Groups and Topology II, eds. B. S. DeWitt & R. Stora, p. 221, North-Holland (1984)
   量子異常に関する基本的な論文の選集として
   藤川和男，静谷謙一編：ゲージ場の理論 **II** (新編物理学選集84)，日本物理学会 (1987)
8. T. Goto & T. Imamura: *Progr. Theor. Phys.,* **14**, 396 (1955)
   J. Schwinger: *Phys. Rev. Lett.,* **3**, 296 (1959)
9. ゲージ理論の参考書として
   中西　襄：場の量子論 (新物理シリーズ19)，培風館 (1975)
   西島和彦：場の理論 (紀伊國屋数学叢書27)，紀伊國屋書店 (1987)
   九後汰一郎：ゲージ場の量子論 I，II (新物理学シリーズ23, 24)，培風館 (1989)
10. ゲージ理論に関する解説として
    西島和彦 他：統一理論とその周辺，日本物理学会誌 **35** 巻 1 号，p.64 (1980)

吉川圭二：トップクォークを求めて (**FS003**)，丸善 (1985)
11. 宮沢弘成：クォークの閉じ込め (物理学最前線 **1**)，共立出版 (1982)
12. 岩崎洋一：格子ゲージ理論 (物理学最前線 **11**)，共立出版 (1985)
13. 河原林研：素粒子のカイラル対称性——$U(1)$問題をめぐって (物理学最前線 **5**)，共立出版 (1983)
14. R. Jackiw & K. Johnson: *Phys. Rev.*, **182**, 1459 (1969)
15. S. L. Adler & W. A. Bardeen: *Phys. Rev.*, **182**, 1517 (1969)
16. K. Fujikawa: *Phys. Rev. Letters*, **42**, 1195 (1979); **44**, 1733 (1980); *Phys. Rev.*, **D21**, 2848 (1980)
17. 崎田文二，吉川圭二：径路積分による多自由度の量子力学 (物理学選書)，岩波書店 (1986)
18. 微分幾何学とゲージ理論に関する総合報告として
T. Eguchi, P. B. Gilkey & A. J. Hanson: *Phys. Rep.*, **C66**, 213 (1980)
電磁場の幾何学的性質に関係した現象の解説として
大貫義郎：アハラノフ-ボーム効果 (物理学最前線 9)，共立出版 (1985)
19. H. B. Nielsen & M. Ninomiya: *Phys. Letters*, **130B**, 389 (1983)
J. Ambjorn, J. Greensite & C. Peterson: *Nucl. Phys.*, **B221**, 381 (1983)
20. S. L. Adler & D. G. Boulware: *Phys. Rev.*, **184**, 1740 (1969)
J. Wess: Proceedings of the 5th Adriatic Meeting on Particle Physics, eds. M. Martinis 他, p. 239, World Scientific (1986)
K. Fujikawa: *Phys. Letters*, **188B**, 115 (1987)
21. カッツ-ムーディ代数とコンフォーマル代数に関する総合報告は
P. Goddard & D. Olive: *Int. Jour. Mod. Phys.*, **A 1**. 303 (1986)
22. J. Wess & B. Zumino: *Phys. Letters*, **37B**, 95 (1971)
23. C. Becchi, A. Rouet & R. Stora: *Ann. Phys.*, **98**, 287 (1976)
24. B. Zumino: Relativity, Groups and Topology II, eds. B. S. DeWitt & R. Stora, p.1291, Notrth-Holland (1984)
R. Stora: Progress in Gauge Field Theory, eds. H. Lehmann 他, p.534, Plenum (1984)
25. K. Fujikawa: *Prog. Theor. Phys.*, **59**, 2045 (1978)
26. L. Alvarez-Gaumé & P. Ginsparg: *Nucl. Phys.*, **B243**, 449 (1984)
27. W. A. Bardeen: *Phys. Rev.*, **184**, 1848 (1969)
28. C. Bouchiat, J, Iliopoulos & L. Maiani: *Phys. Letters*, **38B**, 519 (1972)
D. Gross & R. Jackiw: *Phys. Rev.*, **D6**, 477 (1972)
29. E. Witten: *Nucl. Phys.*, **B223**, 422, 433 (1983)
30. R. Jackiw & R. Rajaraman: *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1219 (1985)

31. L. Faddeev & S. Shatashvili : *Phys. Lett.*, **167B**, 225 (1986)
S. Miyake & K. Shizuya : *Phys. Rev.*, **D36**, 3781 (1987)
32. A. M. Polyakov : *Phys. Lett*. **103B**, 207 (1981)
33. 鹿児島誠一他：一次元電気伝導体 (物性科学選書)，裳華房 (1982)
H. Fukuyama & H. Takayama : Electronic Properties of Inorganic Quasi-One-Dimensional Materials I, ed. P. Monceau, p.41, D. Reidel Pub (1985)
34. B. Sakita & K. Shizuya : *Rhys, Rev.,* **B42**, 5586 (1990)
35. S. Coleman : *Comm. Math. Phys.*, **31**, 259 (1973)
36. H. Fröhlich : *Proc. Roy. Soc. London*. Ser. **A223**, 2961 (1954)
R. E. Peierls : Quantum Theory of Solids, Oxford Univ. Press (1955)
37. M. V. Berry : *Proc. R. Soc. London*, **A392**, 45 (1984)
38. C. G. Callan : *Phys. Rev.*, **D2**, 1541 (1970)
K. Symanzik : *Comm. Math. Phys.*, **18**, 227 (1970)
39. F. Wilczek : *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1144 (1982)